UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS

CONTROL 2

MA22A Cálculo en Varias Variables
2 de Octubre de 2002

Tiempo: 3 horas Profesor: Cristian Pérez

1. *a*) Sean $x = \mathrm{e}^s \cos t$, $y = \mathrm{e}^s \operatorname{sen} t$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Pruebe que si $g(s,t) = f(x,y)$ entonces

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{2s}}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

   b) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y suponga que $f(tx) = t^2 f(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle H(f,0)x, x\rangle,$$

   donde $H(f,0)$ es la matriz Hessiana de f en 0.

2. *a*) Pruebe que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = (s,t) = \left(x + \frac{1}{2}\arctan y, y + \frac{1}{2}\arctan x\right)$$

   admite una inversa local f^{-1} de clase C^1 alrededor de todo punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Calcule la aproximación afín de f^{-1} en una vecindad de $(s_0, t_0) = f(0,1)$.

   b) Pruebe que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^u + xy^2 + v &= 2, \\ \operatorname{sen} u + x^2 y + v^3 &= 1, \end{aligned}$$

   define a u y v como funciones implícitas diferenciables de las variables x e y en una vecindad de $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, 2, 0, 1)$. Sean $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ las funciones implícitas cuya existencia se ha probado. Calcule

$$u(0,2), \quad v(0,2), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,2), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0,2), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0,2) \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y}(0,2).$$

3. *a*) Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y sea $y_0 \in \mathbb{R}$ una raíz *simple* del polinomio con coeficientes reales

$$P(y) = a_0 + a_1 y + \cdots + a_n y^n,$$

es decir, $P(y_0) = 0$ y $P'(y_0) \neq 0$. Sea $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Pruebe que en una vecindad de $(0, y_0)$ la ecuación

$$F(x, y) = (a_0 + x_0) + (a_1 + x_1)y + \cdots + (a_n + x_n)y^n = 0$$

admite una única solución $y = g(x)$ de clase C^1 tal que

$$\nabla g(0) = -\frac{1}{P'(y_0)}(1, y_0, y_0^2, \ldots, y_0^n).$$

b) Encuentre el polinomio de Taylor $P_2(h_1, h_2)$ de segundo orden para la función $f(x, y) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} y$ en torno a $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Calcule una vecindad de $(0, 0)$ para que el error al usar P_2 en lugar de f sea menor que 10^{-2}.

Recuerdos:

Teorema de la Función Inversa. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 y sea $x_0 \in A$ un punto tal que

1. $f(x_0) = y_0$,
2. $J(f, x_0)$ es invertible.

Entonces

1. existen vecindades U y V de x_0 e y_0, respectivamente, tales que $f : U \to V$ es biyectiva,
2. si $f^{-1} : V \to U$ es la inversa local de f, entonces f^{-1} es de clase C^1 y

$$Df^{-1}(y_0) = \big[Df(x_0)\big]^{-1} \qquad \text{o bien} \qquad J\big(f^{-1}, y_0\big) = \big[J(f, x_0)\big]^{-1}.$$

Teorema de la Función Implícita. Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 y sea $(x_0, y_0) \in A$ un punto tal que

1. $F(x_0, y_0) = 0$,
2. $F_y(x_0, y_0)$ es invertible.

Entonces existen vecindades U y W de (x_0, y_0) y x_0, respectivamente, y una única función $g : W \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que

1. $F\big(x, g(x)\big) = 0$ para todo $x \in W$,
2. $g(x_0) = y_0$, y

$$Dg(x_0) = -\big[D_y F(x_0, y_0)\big]^{-1} \circ D_x F(x_0, y_0) \qquad \text{o bien} \qquad J(g, x_0) = -\big[F_y(x_0, y_0)\big]^{-1} F_x(x_0, y_0),$$

donde $\big[F_x(x_0, y_0) | F_y(x_0, y_0)\big] = J\big(F, (x_0, y_0)\big)$.