Control 2 MA22A Cálculo en Varias Variables

Semestre 2005-2

19 de Octubre del 2005

Profesor: P. Guiraud

Problema 1. a) (3 pts) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \frac{y \operatorname{sen} x}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) Mostrar que las derivadas parciales de f existen en todo $\mathbb{R}^2$.

ii) Encontrar el conjunto donde f es diferenciable así como el conjunto donde f es de clase C^1.

b) (3 pts) Mostrar que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y} & \text{si} \quad x+y \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x+y = 0 \end{cases}$$

es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y calcular su matriz Jacobiana en $\mathbb{R}^2$.

Problema 2. a) (4 pts) Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciables. Se considera la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x,y) = f(xy^2, g(x^2+y))$.

i) Escribiendo F como $F = f \circ G$, para una función $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ apropiada, justificar que F es diferenciable y calcular sus derivadas parciales.

ii) Justificar que F es dos veces diferenciable y calcular $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)$ en $\mathbb{R}^2$.

iii) Para $f(u,v) = u + v$ y $g(t) = \cos t$, calcular $\frac{\partial F}{\partial x}(0, \pi/4)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0, \pi/4)$ y $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0, \pi/4)$.

b) (2 pts) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 que satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \qquad \text{para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Mostrar que una función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = g(x+y, x-y)$ satisface la ecuación $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0$ para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Problema 3. a) (2 pts) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z^2 + u + v^2 &= 0 \\ 4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2 &= 0 \\ x + z + w + u^2 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

i) Mostrar que es posible despejar u, v y w en función de x, y, z en una vecindad del punto $(x,y,z,u,v,w) = (0,0,0,0,0,-2)$.

ii) Calcular $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0,0)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(0,0,0)$ y $\frac{\partial w}{\partial x}(0,0,0)$.

b) (2 pts) Sean S_1 y S_2 las superficies de $\mathbb{R}^3$ definidas, respectivamente, por las ecuaciones $(x-c)^2+y^2+z^2 = 3$ y $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$ donde $c \in \mathbb{R}$. Sea (x_0, y_0, z_0) un punto de $S_1 \cap S_2$.

i) Encontrar un vector normal a S_1 y un vector normal a S_2 en el punto (x_0, y_0, z_0).

ii) Escribir una condición para que estos dos vectores sean ortogonales y deducir los valores de c para los cuales se cumple esta condición.

Indicación: Encontrar un sistema de dos ecuaciones usando el hecho que $(x_0, y_0, z_0) \in S_1 \cap S_2$.

c) (2 pts) Encontrar la ecuación del plano tangente al grafo de la función $f(x,y) = (x + \cos y)x^2$ en un punto de su elección.

TIEMPO: 3 HORAS.