CONTROL 2
CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES MA22A
11 DE JUNIO, 2003

JAIME H. ORTEGA

Problema 1:

(1) Consideremos un espacio de Banach E, con norma $\|\cdot\|$ y sea $f : E \longrightarrow E$ una aplicación. Supongamos que existe una serie convergente de números reales $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que la serie $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ convergente y se verifica

$$\|f^n(x) - f^n(y)\| \leq \alpha_n \|x - y\|.$$

Entonces f tiene un único punto fijo. De hecho si x_0 es cualquier punto de E, la sucesión $\{f^n(x_0)\}_n$ converge a dicho punto. Para probar lo anterior utilizaremos los siguientes pasos.

(a) Muestre que si f tiene un punto fijo, entonces este es único.

(b) Sea $x_0 \in E$. Muestre que la sucesión $\{f^n(x_0)\}_n$ es una sucesión de Cauchy. Para ello muestre que si $n, m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\|f^{n+m}(x_0) - f^n(x_0)\| \leq \|f(x_0) - x_0\| \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{n+k}.$$

y concluya.

(c) Pruebe que la sucesión $\{f^n(x_0)\}_n$ es convergente y converge a un punto fijo de f.

(3 pto.)

(2) **Método de Newton:** Supongamos que $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^2, tal que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, estrictamente creciente tal que $f'(x) \geq \delta > 0$ y $0 \leq f''(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces existe un único punto $\xi \in (a, b)$ tal que $f(\xi) = 0$. La idea es mostrar un algoritmo (llamado el Método de Newton) convergente a ξ.

Definamos la función

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

(a) Muestre que

$$g(x) = x \Longleftrightarrow x = \xi.$$

(b) Determine $g'(x)$ y muestre que g alcanza su mínimo en ξ.

(c) Muestre que g verifica

$$\xi \leq g(x) \leq x_0, \quad \forall\, x \in (\xi, x_0],$$

si $x_0 \in [\xi, b]$.

(d) Sea $x_0 \in (a, b)$ tal que $0 < f(x_0) < \dfrac{\delta^2}{M}$ y sea $s = \dfrac{f(x_0)M}{\delta^2} < 1$.

Muestre que $g : [\xi, x_0] \longrightarrow [\xi, x_0]$ is una contracción con constante de Lipschitz $s < 1$.

(e) De lo anterior, justifique que la sucesión $x_0, g(x_0), g(g(x_0)), g(g(g(x_0))), \ldots$ es convergente y converge a ξ.

(3 pto.)

(40 %)

Problema 2:

(1) Calcule

$$\iiint_D x d(x,y,z),$$

donde D es la región limitada por las superficies $y = x^2$, $y = x + 2$, el paraboloide $4z = x^2 + y^2$, y el plano $z = x + 3$.

(2 ptos.)

(2) Sea D la región interior al círculo $r = 3$ y exterior al cardiode $r = 1 + cos\theta$. Suponga que si la densidad de masa del cuerpo es $\rho(x,y)$, entonces la masa total M del cuerpo es

$$M = \iint_D \rho(x,y) d(x,y).$$

Calcule, utilizando coordenadas polares, la masa del cuerpo si su densidad de masa es

$$\rho(x,y) = 1 + x^2 + y^2.$$

(2 ptos.)

(3) Calcule la integral

$$\iint_A x d(x,y),$$

donde A es la región limitada por las curvas $x - y^2 = 0$, $x - y^2 = 2y$, $x - y^2 = 2 - 2y$.

(2 ptos.)

(60 %)

Tiempo: 3 horas.