Control 3 MA22A Cálculo en Varias Variables
Semestre 2005-2

16 de noviembre del 2005

Profesor: P. Guiraud

Problema 1. *Física estadística...* En este problema queremos maximizar la función $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $S(x_1, \ldots, x_n) = -\sum_{k=1}^{n} x_k \ln(x_k)$, primero sobre todo su dominio de definición y luego bajo restricciones.

a) (1 pt) Dar el dominio de S, justificar que S es de clase C^1, calcular sus derivadas parciales y mostrar que es de clase C^2.

b) (1 pt) Encontrar un extremo local de S y mostrar que es un máximo.

c) (1 pts) Encontrar un extremo local de S con la restricción que $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$. Mostrar que es un máximo.

d) (3 pts) Sean $E_1 < E_2 < \ldots < E_n$ y E números reales dados. Queremos maximizar S con las restricciones:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{n} x_k E_k = E.$$

i) Escribir el lagrangeano del problema así como un sistema de $n+2$ ecuaciones que permite encontrar las soluciones del problema.

ii) Mostrar que la solución del sistema tiene coordenadas de la forma $x_i = e^{-\beta E_i}/Z$ donde $Z = \sum_{i=1}^{n} e^{-\beta E_i}$ y dar la ecuación que permite encontrar β (no se le pide encontrarlo).

iii) Mostrar que este punto maximiza S bajo las restricciones.

Problema 2. a) (4 pts) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, x_2) = \operatorname{sen}(x_1 + x_2) + e^{x_2}$.

i) Mostrar que f es de clase C^2 y encontrar su polinomio de Taylor de segundo orden P_2 en torno del punto $(0, -\pi/2)$.

ii) Mostrar que f es de clase C^3 y que para todo $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1^2 + (x_2 + \pi/2)^2 \leq 1\}$ se tiene:

$$\left| \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x_1, x_2) \right| < 1 + e^{1-\pi/2} \qquad \forall\, i, j, k \in \{1, 2\}.$$

iii) Encontrar un conjunto donde $|f(x_1, x_2) - P_2(x_1, x_2)| < 8(1 + e^{1-\pi/2})/6000$.

b) (2 pts) Demostrar que el volumen de $R = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1 < 1,\ 0 \leq x_{i+1} \leq x_i,\ i \in \{1, \ldots, n-1\}\}$ es $\frac{1}{n!}$.

Problema 3. a) (2 pts) Sean $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1,\ (x^2 - 1)/2 \leq y\}$ y $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = xy$. Justificar que f es integrable en D y calcular su integral.

b) (4 pts) Considere las elipses E_1 y E_2 definidas, respectivamente, por las ecuaciones $x^2 + xy + y^2 = 4$ y $x^2 + xy + y^2 - 2\sqrt{3}(x + y) = 0$ ver Figura 1. Queremos calcular el área de dominios delimitados por estas elipses usando el teorema de cambio de variable.

i) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación definida por $T(u, v) = (u/\sqrt{3} - v, u/\sqrt{3} + v)$. Mostrar que T y su inversa T^{-1} son de clase C^1.

ii) Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 \leq 4,\ x^2 + xy + y^2 - 2\sqrt{3}(x + y) \geq 0,\ -x \leq y, x \leq y\}$, ver Figura 1. Encontrar y dibujar $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tal que $T(\Omega) = D$.

iii) Encontrar $a, b \in \mathbb{R}$, $\phi_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ tales que $\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in [a, b],\ \phi_1(u) \leq v \leq \phi_2(u)\}$.

iv) Calcular el área de D así como el área del dominio dentro de E_1 y fuera de E_2 (es decir $E_1 \setminus E_2$).

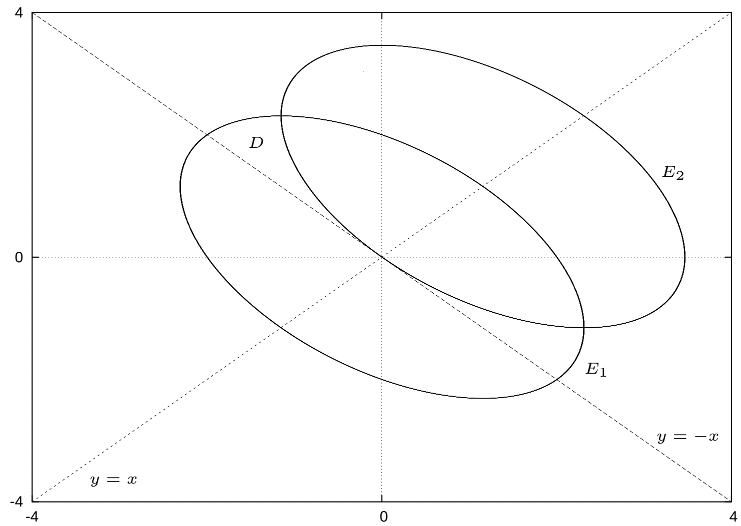

Figura 1: Las elipses E_1, E_2, las rectas $y = x$, $y = -x$ y la región D.

TIEMPO: 3 HORAS.