EXAMEN
CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES MA22A
07 DE JULIO, 2003

JAIME H. ORTEGA

Problema 1: (30 %)

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^2 .$$

(1) Encuentre el máximo de f sujeto a la restricción

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1.$$

(4 ptos.)

(2) Utilizando el resultado anterior pruebe la media geométrica de números positivos es siempre menor o igual que la media aritmética, es decir, dados $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{n}.$$

(2 ptos.)

Problema 2: (40 %)

(1) Calcule

$$\iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} d(x, y, z),$$

donde D está limitada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(3 ptos.)

(2) Calcule el volumen de la región interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ y exterior al cono circular recto $z^2 = x^2 + y^2$.

(3 ptos.)

Problema 3: (30 %)

En este ejercicio pretendemos calcular el valor de la integral

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx.$$

(1) Definamos la función $F : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} \operatorname{sen} x}{x} dx.$$

Muestre que F está bien definida y es derivable para $a \in (0, +\infty)$.

(2 ptos.)

(2) Calcule $F'(a)$ en función de a. A partir del cálculo anterior calcule $F(a)$, con $a \in (0, +\infty)$.

(3 ptos.)

(3) Muestre que $\lim_{a \to 0^+} F(a)$ existe. Obtenga el valor de $F(0)$ asumiendo que

$$\lim_{a \to 0^+} F(a) = F(0) = I.$$

(1 ptos.)

Tiempo: 3 horas.