MA22A-01 : Cálculo en Varias Variables
Examen

Prof: Francisco Ortega
Aux: Alejandro Omon

30 Enero 1997

Pregunta 1. Sea g una función continua en el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\| = 1\}$ tal que $g(0,1) = g(1,0) = 0$ y $g(-x) = -g(x)$.

Se define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \|x\| g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Dado $x \in \mathbb{R}^2$, se define $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $h(t) = f(tx)$. Muestre que h es diferenciable.

(b) Pruebe que f no es diferenciable en $(0,0)$ salvo en el caso que $g = 0$.

Ind: Pruebe primero que $J_f(0,0)$ tendría que ser cero, considerando (h,k) con $k = 0$ y después con $h = 0$.

Pregunta 2. Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Sea $Q(x) = x^t A x$ y sea u la solución del problema

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \max & Q(x) \\ s.a. & \\ & x^t x = 1 \end{array}$$

Muestre que u es el vector propio asociado al valor propio $Q(u)$. Pruebe además, que dicho valor propio es el de máximo modulo.

Pregunta 3. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define la función $g_x(y) = f(x,y)$. Suponga que para cada x existe un único y tal que $g'_x(y) = 0$; sea $c(x)$ dicho y.

(a) Si $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) \neq 0 \ \forall (x,y)$ pruebe que c es diferenciable y

$$c'(x) = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, c(x))}{\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x, c(x))}$$

Ind: $g'_x(y) = 0$ puede escribirse como $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

(b) Pruebe que si $c'(x) = 0$ entonces para algún y se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

Pregunta 4. **(a)** Calcule

$$\int_0^2 \int_{\sqrt[3]{\frac{y}{2}}}^1 e^{x^2}\, dx dy$$

(Dibuje la región de Integración).

(b) Calcule el volumen del elipsoide dado por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Tiempo : 3:30 Hrs.