# MA22A-01 : Cálculo en Varias Variables
# Examen Recuperativo

Prof: Francisco Ortega
Aux: Alejandro Omon

07 Marzo 1997

**Pregunta 1.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{17}{4} - x^2 - y^2 & \text{si } x^2+y^2 < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } \frac{1}{4} \leq x^2+y^2 < 1 \\ \sqrt{x^2+y^2} & \text{si } x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$$

**(a)** Determine el dominio y estudie la continuidad de $f$.

**(b)** Determine y dibuje las curvas de nivel $k$ de $f$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

**(c)** Determine el gradiente de $f$

**(d)** Calcule las derivadas direccionales de $f$ en un punto $(a,b)$ tal que $a^2+b^2 = 1$.

**(e)** Concluya sobre la diferenciabilidad de $f$.

**Pregunta 2.** **(a)** Prueba la regla de Leibnitz :

Si $\frac{\partial}{\partial y} g(x,y)$ es continua en $[a,b] \times [c,d]$ entonces :

$$\frac{d}{dy} \int_a^b g(t,y)dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} g(t,y)dt$$

**Ind:** Considere $\int_c^y \int_a^b \frac{\partial}{\partial v} g(t,v)dtdv$ en ambos ordenes de integración.

**(b)** si $\frac{\partial}{\partial y} g(x,y)$ es continua y $h_1, h_2 \in \mathcal{C}^1$, encontrar una expresión para

$$\frac{d}{dy} \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} g(t,y)dt$$

**Pregunta 3.** Se define la región $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq x^2\}$, se le pide

**(a)** Calcular, sin usar cambio de variables :

$$\int_S \frac{1}{\sqrt{1+4x+4y}} dxdy$$

**(b)** Se define la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como :

$$T(u,v) = (u+v, u^2 - v) = (x,y)$$

Se le pide que :

**(b.1)** Encuentre $R \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $T(R) = S$

**(b.2)** Exprese $I$ como una integral sobre $R$.

**(b.3)** Calcule el valor de esta última integral.

**Pregunta 4.** Se desea resolver el problema

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & \|c-d\|^2 \\ s.a. & \\ & Ad = 0 \end{array}$$

donde $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in M_{m\times n}$ estan dados y $m < n$

**(a)** Encontrar una solución $\bar{d}$. Caractericela.

**(b)** En que caso esta solución $\bar{d}$ es única ?. Dar la solución explicita.

**(c)** Demuestre que la solución $\bar{d}$ satisface la condición $c^t \cdot \bar{d} \geq 0$ y que además

$$c^t \cdot \bar{d} = 0 \text{ si y solo si } \exists \lambda \in \mathbb{R}^m \text{ tal que } A^t \lambda = c$$

**Las personas que dan el recuperativo normal pueden escoger 3 de las 4 preguntas, el resto debe resolver las 4 preguntas del examen.**

**Tiempo : 3:00 Hrs.**