Examen MA22A Cálculo en Varias Variables

Semestre 2005-2

3 de diciembre del 2005

Profesor: P. Guiraud

Problema 1. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida en D por:

$$f(x,y) = \left(xy + x^3, (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2), \frac{y^2(e^x-1)}{x^2+y}\right)$$

a) (0.25 pt) Dar las funciones componentes de f y estudiando sus dominio, encontrar y dibujar D.

b) (1 pt) Dar $Int(D)$, $Der(D)$, $Adh(D)$ y $Fr(D)$ y deducir si D es abierto, cerrado o ninguno de los dos.

c) (4 pts) Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida en todo $\mathbb{R}^2$ por $g(x,y) = f(x,y)$ si $(x,y) \in D$ y $g(x,y) = (0,0)$ si $(x,y) \notin D$

i) Estudiar la continuidad de cada una de las funciones componentes de g en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

ii) Calcular las derivadas parciales de g en $D \cup \{(0,0)\}$ y mostrar que es diferenciable en este conjunto.

d) (0.75 pt) Justificar que $h(x,y) = \cos(xy) + x^3$ es C^2 en $(1,0)$ y dar su polinomio de Taylor de orden 2.

Problema 2. a) (1 pt) Considere el sistema definido por las ecuaciones: $x + y - uv = 0$ y $xy - u + v = 0$

i) Determine en que puntos de $\mathbb{R}^4$ es posible escribir x e y como $x = g(u,v)$ e $y = h(u,v)$.

ii) Expresar $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)$ en función de u, v, $g(u,v)$ y $h(u,v)$.

b) (2.5 pts) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 y $F(x,y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$.

i) Escribiendo F como $F = f \circ G$, para una función $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ apropiada, justificar que F es diferenciable. Calcular sus derivadas parciales y mostrar que F es de clase C^2.

ii) Mostrar que para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 4(x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x^2-y^2, 2xy) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(x^2-y^2, 2xy)\right)$$

c) (2.5 pts) Sean $f(x,y) = y - x^2$ y C el circulo de ecuación $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = a^2$.

i) Para cada valor de $a > 1$ encontrar puntos que pueden ser extremos locales de f restringida a C.

ii) Clasificar los que tienen multiplicador de Lagrange distinto de $-1/a$.

Problema 3. a) (3pts) Sea $a > 0$ y S la superficie definida por $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ xyz = a\}$.

i) Mostrar que la ecuación del plano tangente a S en un punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$ es: $x/x_0 + y/y_0 + z/z_0 = 3$.

ii) Suponiendo $x_0, y_0 > 0$, encontrar y dibujar la recta R que se obtiene como la intersección entre el plano tangente y el plano $z = 0$. Precisar los puntos de intersección entre R y los ejes.

iii) Encontrar $a, b \in \mathbb{R}$, las funciones $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ y f tal que el volumen del sólido limitado por el plano tangente y los planos $(x0y)$,$(x0z)$ y $(y0z)$ es dado por la integral:

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\, dydx$$

Calcular el volumen del solido.

b) (3 pts) Sea D la región de la Figura 1 y f definida en D por $f(x,y) = 1/\sqrt{1+4x+4y}$.

i) Calcular el área de D y la integral de f.

ii) Sea Ω la región de la Figura 1 y T definida en Ω por $T(u,v) = (u+v, u^2-v)$. Mostrar gráficamente que $T(\Omega) = D$ y usando el teorema del cambio de variables, encontrar de nuevo el valor de la integral de f.

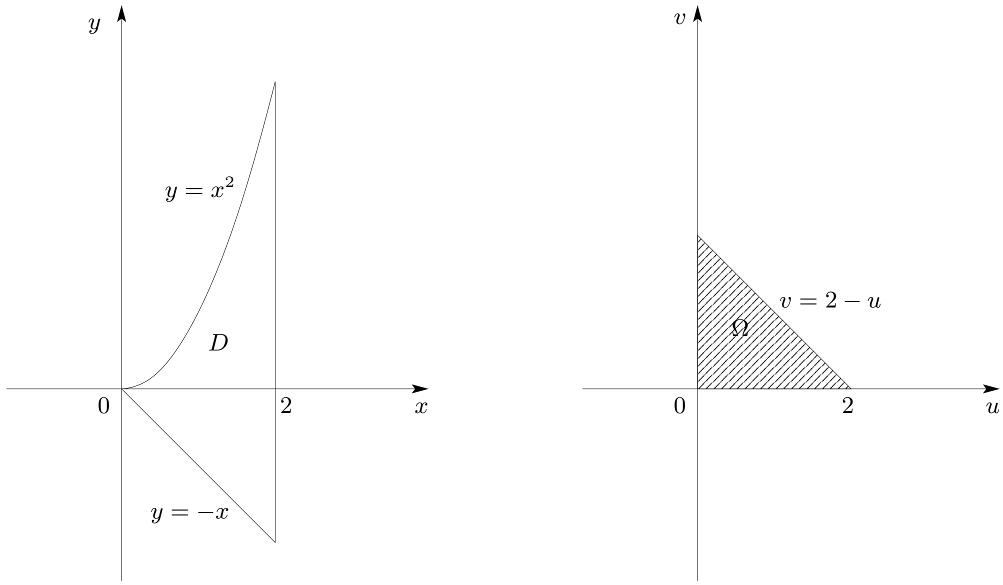

Figura 1: Las regiones D y Ω.

TIEMPO: 3 HORAS.