Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas U. de Chile

Ejercicios capitulo 1

PROFESORES: RAFAEL CORREA, PEDRO GAJARDO

AUXILIARES: GONZALO SÁNCHEZ, RODOLFO GAINZA

1. *a*) Dada una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$ y una matriz no singular P de $n \times n$ demuestre que la función $\|\vec{x}\|_P = \|P\vec{x}\|$ es también una norma en $\mathbb{R}^n$.

   b) Demuestre que en el e.v. $\mathbb{R}^2$, la función $\|\vec{x}\|_e = \left[\frac{x_1^2}{9} + 4x_2^2\right]^{1/2}$ es una norma. Haga un dibujo de los conjuntos $B(\vec{0}, 1)$ y $B'(\vec{0}, 1)$.

2. Demuestre que en el e.v. $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ de las funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$, la función $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$ es una norma. Demuestre que en el e.v. $I([a,b], \mathbb{R})$ de las funciones integrables de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$, la función $\|\cdot\|$, no es una norma.

3. Demuestre que en el e.v. $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ la función $\|f\|_2 = \left[\int_a^b f(t)^2 dt\right]^{1/2}$ es una norma.

4. Demuestre (usando el teorema fundamental del álgebra) que en el e.v. $\mathcal{P}$ de los polinomios de una variable real, las siguientes funciones son normas

$$\begin{aligned} \|p\| &= \max_{x \in [0,1]} |p(x)| \\ \|p\|' &= \max\{|\alpha_0|, |\alpha_1|, ..., |\alpha_n|\} \quad (\text{ donde } \quad p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i) \end{aligned}$$

5. Demuestre que en el e.v. l_∞ de las sucesiones reales acotadas, la función $\|\{r_k\}\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |r_k|$ es una norma.

6. Demuestre que en el e.v. l_1 de las sucesiones reales que verifican "$\sum |r_k|$ convergente", la función $\|\{r_k\}\|_1 = \sum |r_k|$ es una norma.

7. Demuestre que en un e.v.n. todo conjunto formado por un solo elemento es cerrado.

8. Demuestre que en un e.v.n. los únicos conjuntos que son abiertos y cerrados al mismo tiempo, son el conjunto vacío y el espacio entero.

9. Determine el interior y la adherencia de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\{\vec{x} : x_2 > x_1\}, \{\vec{x} : 0 < \|\vec{x}\|_2 \leq 1\}$$

$$\{\vec{x} : x_1 = x_2 \text{ y } x_1 > 0\}, \{\vec{x} : x_1 \in \mathbb{Q}\}, \{(\frac{1}{k}, (-1)^k) : k \in \mathbb{N}\}$$

10. Dados dos conjuntos A, B en un e.v.n. $\vec{E}$, demuestre que

    a) $int(A \cap B) = intA \cap intB$.

    b) $int(A \cup B) \supset intA \cup intB$ (dé un ejemplo donde no hay igualdad).

    c) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

    d) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ (dé un ejemplo donde no hay igualdad)

    e) $\bar{A} = intA \cup \{\vec{x} \in \vec{E} : B(\vec{x}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ y $B(\vec{x}, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0\}$

    f) $A \subset B \;\Rightarrow\; intA \subset intB$ y $\bar{A} \subset \bar{B}$.

    g) $intA \cap B = \emptyset \Leftrightarrow intA \cap \bar{B} = \emptyset$

    h) $\bar{A} = \vec{E}$ y $intB \cap A = \emptyset \Rightarrow intB = \emptyset$

    i) $int(A^c) = (\bar{A})^c$

    j) $(\overline{A^c}) = (intA)^c$

11. Si definimos la "distancia" de un punto $\vec{x}$ de un e.v.n. $\vec{E}$ a un conjunto $A \subset \vec{E}$ como la cantidad
$$d_A(\vec{x}) = \text{ínf}\{\|\vec{x} - \vec{y}\| : \vec{y} \in A\}$$
demuestre que $\bar{A} = \{\vec{x} \in \vec{E} : d_A(\vec{x}) = 0\}$.

12. Si A es un conjunto en un e.v.n. $\vec{E}$ con la propiedad "$\bar{A} = \vec{E}$ y $intA = \phi$", entonces el conjunto A^c (complemento de A) tiene la misma propiedad.

13. En el e.v. $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ dotado de la norma $\|\cdot\|_1$ (ver Problema 2) demuestre que la sucesión $\{f_k\}$ definida por
$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -2^k(x - \frac{1}{2}) + 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^k}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{2^k}, 1] \end{cases}$$
es de Cauchy y no es convergente.

14. Demuestre que en el e.v. $\mathcal{A}([0,1], \mathbb{R})$ de las funciones acotadas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, dotado de la norma $\|\cdot\|_\infty$, la sucesión $\{f_k\}$ definida en el problema anterior no es convergente.

15. Demuestre que en el e.v.n. l_1, definido en el Problema 6, el conjunto
$P = \{\{x_k\} \;:\; x_k \geq 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\}$ tiene interior vacío.

16. Demuestre que en el e.v.n. l_1, definido en el Problema 6, la bola $B(\vec{0}, 1)$ no es compacta.

17. Demuestre que un subconjunto cerrado de un conjunto compacto, es también compacto.

18. Demuestre que la intersección de un conjunto compacto con un conjunto cerrado, es un conjunto compacto.

19. Si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos compactos en un e.v.n. tal que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$, entonces existe un número finito de conjuntos de la familia: $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_n}$, con la propiedad $\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j} = \emptyset$.

20. Si A es un conjunto compacto en un e.v.n. y si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos abiertos tales que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \supset A$, entonces existe un número finito de conjuntos de la familia: $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_n}$, con la propiedad $\bigcup_{j=1}^{n} A_{i_j} \supset A$.

21. Dado el conjunto $A = [0,1[$ en $\mathbb{R}$, encuentre una familia de abiertos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ cuya unión contenga al conjunto A y tal que no exista un número finito de ellos cuya unión contenga a A.

22. Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia decreciente de conjuntos compactos (no vacíos) en un e.v.n., demuestre que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \neq \emptyset$.

23. *a*) De un ejemplo en $\mathbb{R}$ de una familia decreciente de conjuntos acotados (no vacíos) cuya intersección sea vacía.

    b) De un ejemplo en $\mathbb{R}$ de una familia decreciente de conjuntos cerrados (no vacíos) cuya intersección sea vacía.

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas U. de Chile	**25 de agosto de 2005**

Anexo capitulo 1 del apunte del curso MA22A año 2005

Profesores: Rafael Correa, Pedro gajardo
auxiliares: Gonzalo Sánchez, Rodolfo Gainza

P1 (a) primero debemos demostrar que $\forall x \in \mathbb{R}^2 \ \|x\| \ \geq \ 0$ y que si $\|x\| \ = \ 0 \Rightarrow x \ = \ 0$ en efecto:

$\|x\|_P \ = \ \|Px\| \geq \ 0 \ y \ si \ \|x\|_P \ = \ 0 \Rightarrow \|Px\| \ = \ 0 \ y \ como \ P \ es \ invertible \ x \ = \ 0$
segundo debemos ver que $\|\lambda x\|_P \ = \ |\lambda| \, \|x\|_P$

$$\|\lambda x\|_P \ = \ \|P\lambda x\| \ = \ \|\lambda P x\| \ = |\lambda| \, \|Px\| \ = \ |\lambda| \, \|x\|_P$$

y tercero la desigualdad triangular:

$$\|x+y\|_P \ = \ \|P(x+y)\| \ = \ \|Px+Py\| \ \leq \ \|Px\| + \|Py\| \ = \ \|x\|_P + \|y\|_P$$

por lo tanto es norma.

(b) notemos que $\|x\|_e = \left\|(\frac{1}{3}x_1, 2x_2)\right\|_2$ de aqui obtenemos inmediatamente las propiedades de norma.
Como ejemplo mostraremos la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_e &= \ \|(x_1+y_1, x_2+y_2)\|_e \\
&= \left\|(\frac{1}{3}(x_1+y_1), 2(x_2, y_2))\right\|_2 \\
&= \left\|(\frac{1}{3}x_1, 2x_2) + (\frac{1}{3}y_1, 2y_2)\right\|_2 \\
&\leq \left\|(\frac{1}{3}x_1, 2x_2)\right\|_2 + \left\|\frac{1}{3}y_1, 2y_2)\right\|_2 \\
&= \ \|x\|_e + \|y\|_e
\end{aligned}$$

P2 1^0) $\|f\|_1 \geq 0$en efecto pues es la integral del modulo de la función, veamos que pasa cuando $\|f\|_1 = 0$ supongamos que $f \ \neq \ 0$ (como funciones) $\Rightarrow \ \exists x \in [a,b] \ t'q \ |f(x)| = \epsilon \ > \ 0 \ \Rightarrow \exists \delta > 0 \ t'q \ \forall y \in \ (x-\delta, x+\delta) \ |f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(t)|\,dt \ &= \ \underbrace{\int_a^{x-\delta} |f(t)|\,dt} \ + \underbrace{\int_{x-\delta}^{x+\delta} |f(t)|\,dt} \ + \underbrace{\int_{x+\delta}^{b} |f(t)|\,dt} \\
&\geq \quad 0 \quad + \quad 2\delta\frac{1}{2}\epsilon \quad + \quad 0 \quad \geq \quad \delta\epsilon > 0
\end{aligned}$$

contradicción.

2^0) $\|\lambda f\|_1 \;=\; \int_a^b |\lambda f(t)|\, dt \;=\; \int_a^b |\lambda|\, |f(t)|\, dt \;=\; |\lambda\, \|f\|_1|$

3^0) $\|f+g\|_1 \;=\; \int_a^b |f(t)+g(t)|\, dt \;\leq\; \int_a^b |f(t)|+|g(t)|\, dt \;=\; \int_a^b |f(t)|\, dt \;+\; \int_a^b |g(t)|\, dt \;=$
$\|f\|_1 + \|g\|_1$

P3 las primeras partes son analogas al problema anterior por lo que solo se demos trara la desigualdad de Minkowsky: para esto usaremos una de las desigualdades de Minskowsky:

$$\forall c, d > 0\ ,\ cd \leq\ \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}d^2$$

primero demostremos que $\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \;\leq\; \|f\|_2\, \|g\|_2$

en efecto tomando en la desigualdad anterior $c = \frac{|f|}{\|f\|_2} yd = \frac{|g|}{\|g\|_2}$ obtenemos

$$\frac{1}{\|f\|_2\, \|g\|_2}\, |f|\, |g| \leq \frac{1}{2\, \|f\|_2^2}\, |f|^2 + \frac{1}{2\, \|g\|_2^2}\, |g|^2$$

integrando en $[a, b]$ obtenemos:

$$\frac{1}{\|f\|_2\, \|g\|_2} \int_a^b |f(t)g(t)|\, dt \leq \frac{1}{2\, \|f\|_2^2} \int_a^b f(t)^2 dt + \frac{1}{2\, \|g\|_2^2} \int_a^b g(t)^2 dt \;=\; 1$$

luego:

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\, dt \leq \|f\|_2\, \|g\|_2 \quad y\ por\ otra\ parte\ \left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)g(t)|\, dt \leq \|f\|_2\, \|g\|_2$$

por otra parte:

$$\begin{aligned} \|f+g\|_2^2 \;&=\; \int_a^b (f+g)^2 dt \;=\; \int_a^b (f^2+g^2+2fg)dt \\ &= \int_a^b f^2 dt + \int_a^b g^2 dt + 2\int_a^b fg dt \leq \int_a^b f^2 dt + \int_a^b g^2 dt +\ 2\, \|f\|_2\, \|g\|_2 \\ &= \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\, \|f\|_2\, \|g\|_2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2 \end{aligned}$$

tomando raiz obtenemos el resultado deseado.

P4 comencemos por demostrar que $\max\limits_{x\in[0,1]} |p(x)|$ es una norma.

1) Primero que nada es positiva. veamos que si $\|p\| = 0 \Rightarrow\ \ p = 0$ en efecto si $\|p\| = 0 \Rightarrow p(x) = 0 \forall x \in [0, 1]$ entonces p tiene infinitas raices por el teorema fundamental del algebra p es identicamente nulo.

2) $\|\lambda p\| = \max\limits_{x\in[0,1]} |\lambda p(x)| = \max\limits_{x\in[0,1]} |\lambda|\,|p(x)| = |\lambda|\,\|p\|$

3) $\|p+q\| = \max\limits_{x\in[0,1]} |p(x)+q(x)| \leq \max\limits_{x\in[0,1]} (|p| + |q|) \leq \max\limits_{x\in[0,1]} |p(x)| + \max\limits_{x\in[0,1]} |q(x)| = \|p\| + \|q\|$

procedamos a demostrar que $\|p\|' = \max\limits_{i=0}^{n} |\alpha_i|$ es norma donde $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$

1) primero que nada es positiva. veamos que $\|p\|' = 0 \Rightarrow\ p = 0$ en efecto si $\|p\|' = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \forall\ i \in \{0...n\} \Rightarrow p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i x^i = \sum\limits_{i=0}^{n} 0 = 0 \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\lambda p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda\alpha_i x^i$ por lo tanto $\|\lambda p\| = \max\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i(\lambda p)| = \max\limits_{i=1}^{n} |\lambda\alpha_i| = \max\limits_{i=1}^{n} |\lambda|\,|\alpha_i| = |\lambda| \max\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i| = |\lambda|\,\|p\|'$

3) Sean p y q polinomios s.p.g. del mismo grado (sino lo tienen se consideran los coeficientes del de menor grado 0 hasta que ambos tengan la misma cantidad.

$$p+q \ = \ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \ + \ \sum_{i=0}^{n} \beta_i x^i \ = \ \sum_{i=0}^{n} (\alpha_i + \beta_i) x^i$$

$$\Rightarrow \|p+q\|' \ = \ \max_{i=0}^{n} |\alpha_i + \beta_i| \ \leq \ \max_{i=0}^{n} |\alpha_i| + |\beta_i| \ \leq \ \max_{i=0}^{n} |\alpha_i| \ + \ \max_{i=0}^{n} |\beta_i| \ = \|p\|' + \|q\|'$$

P5 1^0) como por definición es positiva veamos que $\|\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_\infty = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$ en efecto: $\|\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_\infty = 0 \Rightarrow \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |r_k| \Rightarrow r_k = 0 \forall\ k \in \mathbb{N}\ \Rightarrow \{r_k\}_{k\in\mathbb{N}} = 0_{l_\infty}$

2^0) $\|\lambda\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |\lambda\{r_k\}| = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |\lambda|\,|\{r_k\}| = |\lambda| \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |\{r_k\}| = |\lambda|\,\|\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_\infty$

3^0) $\|\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}} + \{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_\infty = \|\{r_k + s_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |r_k + s_k| \leq \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |r_k| + |s_k| \leq \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |r_k| + \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |s_k| = \|\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_\infty + \|\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_\infty$

P6 1^0) como por definición es positiva basta ver que $\|\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_1 = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$ en efecto:

$$\|\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_1 = 0 \Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{N}} |r_k| = 0 \Rightarrow r_k = 0 \forall\ k \in \mathbb{N}$$

2^0) $\|\lambda\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_1 = \|\{\lambda r_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_1 = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} |\lambda r_k| = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} |\lambda|\,|r_k| = |\lambda| \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} |r_k| = |\lambda|\,\|\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_1$

3^0)
$$\|\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}} + \{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_1 = \ \|\{r_k + s_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_1 = \ \sum_{k\in\mathbb{N}} |r_k + s_k| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |r_k| + \sum_{k\in\mathbb{N}} |s_k| = \|\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_1 + \|\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_1$$

P7 Sea $x \in \mathbf{E}$ e.v.n. por demostra que: $\{x\}$ es cerrado.
para esto demostremos que $\{x\}^c$ es abierto en efecto sea $y \in \{x\}^c$ entonces $y \neq x$ por lo tanto $\|x-y\| \neq 0$ lo cual implica que $x \notin B(x, \frac{\|x-y\|}{2})$ lo que significa que $B(x, \frac{\|x-y\|}{2}) \subseteq \{x\}^c$ por lo que $\{x\}^c$ es abierto y $\{x\}$ es cerrado.

P8 Sea A tal que es cerrado y abierto al mismo tiempo y $A \neq \emptyset$ y $A \neq \mathbf{E}$ donde $\mathbf{E}$ es el e.v.n. entonces A^c tambien es abierto y cerrado.
como A es no vacio $\exists x \in A$ y como no es el espacio $\exists y \in A^c$

$$sea B = \{z \in \mathbf{E} \;/ z = x + (y-x)\lambda,\ \lambda \in\ [0,1]\}$$

y consideremos y sea $\bar{\lambda} = \inf\limits_{\substack{z\in B\\ z\in A^c}} \lambda$ como A y A^c son abiertos $\exists \epsilon_x, \epsilon_y$ tal que $B(x,\epsilon_x) \subseteq A$ y $B(y,\epsilon_y) \subseteq A^c$ implica que $\lambda \in (\epsilon_x, 1-\epsilon_y)$ sea $\bar{z}$ el elemento en B asociado a $\bar{\lambda}$ i.e. $\bar{z} = x + (y-x)\bar{\lambda}$ como $\bar{\lambda} = \inf\limits_{\substack{z\in B\\ z\in A^c}} \lambda$ implica que $\exists \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{\lambda}$ y además $z_n = x + (y-x)\lambda_n \in A^c$
veamos ahora que la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\bar{z}$

$$\|z_n - \bar{z}\| = \left\|\{x + (y-x)\lambda_n\} - \{x - (y-x)\bar{\lambda}\}\right\| = \left|\lambda_n - \bar{\lambda}\right| \|x-y\|$$

que converge a 0 cuando n tiende a infinito pues $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\bar{\lambda}$ y $\|x-y\|$ se mantiene constante.

Como $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\bar{z}$ y esta contenida en A^c que es cerrado $\bar{z} \in A^c$ ahora como A^c es abierto entonces $\exists\ \epsilon \;/ B(\bar{z},\epsilon) \subseteq A^c$ lo cual contradice el hecho que $\bar{\lambda} = \inf\limits_{\substack{z\in B\\ z\in A^c}} \lambda$ pues $B \cap B(\bar{z},\epsilon) = \{z \in \mathbf{E} / z = x + (x-y)\lambda,\ \lambda \in (\bar{\lambda}-\delta, \bar{\lambda}+\delta)$ para cierto δ (que depende de ϵ)$\}$ por lo que $\exists \lambda' < \bar{\lambda}$ y $z' = x + (y-x)\lambda' \in A^c$

P9

1) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 /\ x_2 > x_1\}$ entonces:
$int(A) = A$ en efecto sea $x \in A$ entonces $x_2 > x_1$ y por lo tanto $x \notin \{x \in \mathbb{R}^2 /\ x_2 = x_1\}$ consideremos la distancia euclideana de x a la recta identidad y denotemosla o d_x entonces $B(x, \frac{d_x}{2}) \subseteq A$ por lo que A es abierto.
$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 /\ x_2 \geq x_1\}$ en efecto este conjunto es cerrado (su complemento es abierto por un argumento identico al anterior y no hay un cerrado más pequeo que el que contenga a A.

2) $B = \{x \in \mathbb{R}^2 / 0 < \|x\| \leq 1\}$ entonces $int(B) = \{x \in \mathbb{R}^2 / 0 < \|x\| < 1\}$ en efecto este conjunto es abierto y si tomamos cualquier elemento de B de norma 1 en toda bola entorno este punto habra elementos de $\mathbb{R}^2$ de norma mayor que 1.
$\bar{B} = B_2(0,1)$ en efecto es cerrada contiene a B y el si tomamos cualquier bola entorno a cero de radio positivo esta intersecta B.

3) $C = \{x \in R^2 /\ x_1 = x_2,\ x_1 > 0\}$ entonces $int(C) = \emptyset$ pues para cualquier x en C y para toda bola de cualquier radio esta se sale de C pues C es solo un segmento de recta.
$\bar{C} = C \cup \{0\}$ pues este conjunto es cerrado y cualquier bola de radio positivo entorno a 0 intersecta el rayo C.

4) $D = \{x \in \mathbb{R}^2 / x_1 \in \mathbb{Q}\}$ entonces se tiene que $int(D) = \emptyset$ pues en toda bola de $\mathbb{R}^2$ existen elementos con primera componente en $\mathbb{I}$.
$\bar{D} = \mathbb{R}^2$ pues en toda bola de $\mathbb{R}^2$ existen elementos con primera componente en $\mathbb{Q}$ (pues $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$)

5) $E = \{(\frac{1}{k}, (-1)^k) : \ k \in \mathbb{N}\}$. Entonces $int(E) = \emptyset$ el argumento es de cardinalidad pues E es numerable mientras que toda bola en $\mathbb{R}^2$ es de cardinalidad no numerable. $\bar{E} = E \cup \{(0,1)^t, (0,-1)^t\}$ pues este conjunto es cerrado (ejercicio) y existen suceciones que en E que convergen a los puntos del plano $(0,1)$ y $(0,-1)$

P10 a) $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$
demostración:
$\subseteq]$ $int(A) = \bigcup\limits_{\substack{\theta \subseteq A \\ \theta abierto}} \theta$ entonces como $int(A \cap B) \subseteq A \cap B \subseteq A \Rightarrow int(A \cap B) \subseteq int(A)$ analogamente se tiene que $int(A \cap B) \subseteq int(B)$ por lo tanto $int(A \cap B) \subseteq int(A) \cap int(B)$.
$\supseteq]$ Sea $x \in int(A) \cap int(B)$ entonces$\exists \epsilon_1, \epsilon_2 \diagup B(x, \epsilon_1) \subseteq A$ y $B(x, \epsilon_2) \subseteq B$ tomando $\epsilon = \text{mín}\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ obtenemos que la bola $B(x, \epsilon) \subseteq A \cap B$ por lo tanto x esta en el interior de $A \cap B$.

b) $int(A \cup B) \supseteq int(A) \cup int(B)$
demostracion: sea $x \in int(A) \cup int(B)$ s.p.g $x \in int(A) \Rightarrow \exists \epsilon > 0 \diagup B(x.\epsilon) \subseteq int(A) \subseteq A$ entonces $B(x, \epsilon) \subseteq A \cup B$ lo que equivale a $x \in int(A \cup B)$.
Un ejemplo de que la desigualdad anterior no es igualdadn se tiene en $\mathbb{R}$ tomando $A = \mathbb{Q}$ y $B = \mathbb{I}$ entonces $int(A) = int(B) = \emptyset$ y por otra parte $int(A \cup B) = \mathbb{R}$.

c) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
demostracion:
$\subseteq]$ como $\bar{A} \cup \bar{B}$ es cerrado y $A \cup B \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$ setiene que $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$
$\supseteq]$ sea $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$ entonces s.p.g. $x \in \bar{A} \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \ B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$
$\Rightarrow B(x, \epsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{A \cup B}$

d) $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$
demostracón: como $A \cap B \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$ y $\bar{A} \cap \bar{B}$ es cerrado $\Rightarrow \overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$
Un ejemplo en $\mathbb{R}$ de que no se tiene la igualdad se puede ver tomando $A = \mathbb{Q}$ y $B = \mathbb{I}$ pues, $\bar{A} = \bar{B} = \mathbb{R}$ y $\overline{A \cap B} = \bar{\emptyset} = \emptyset$

e) $\bar{A} = int(A) \cup \{x \in \mathbf{E} \diagup \forall \epsilon > 0 \ B(x.\epsilon) \cap A \neq \emptyset \ \wedge \ B(x, \epsilon) \cap A^c \neq \emptyset\}$
demostracion: $\supseteq]$ evidente de la definicion de aderencia.
$\subseteq]$ sea $x \in \bar{A} \backslash int(A) \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \ B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ (pues $x \in \bar{A}$) y $B(x, \epsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ (sino $\exists \epsilon > 0 \ t'q.B(x, \epsilon) \subseteq A \Rightarrow x \in int(A)$)

f) $A \subseteq B \Rightarrow int(A) \subseteq int(B) \ \wedge \ \bar{A} \subseteq \bar{B}$
demostración:
$int(A) \subseteq A \subseteq B \ \wedge \ int(B) = \bigcup\limits_{\substack{\theta abierto \\ \theta \subseteq B}} \theta \supseteq int(A)$ (pues $int(A)$ es un abierto).
$A \subseteq B \subseteq \bar{B} \ \wedge \ \bar{A} = \bigcap\limits_{\substack{\theta cerrado \\ B \subseteq \theta}} \theta \subset \bar{B}$ (pues $\bar{B}$ es cerrado)

g) $int(A) \cap B = \emptyset \Leftrightarrow int(A) \cap \bar{B} = \emptyset$
$\Leftarrow]$ evidente pues $B \subseteq \bar{B}$
$\Rightarrow]$ por contradicción:
Sea $x \in int(A) \cap \bar{B} \Leftrightarrow x \in int(A) \ \wedge \ x \in \bar{B}$
Como $x \in int(A) \Rightarrow \exists \epsilon > 0 \diagup B(x, \epsilon) \subseteq int(A)$
Y como $x \in \bar{B} \Rightarrow B(x, \frac{\epsilon}{2}) \cap B \neq \emptyset$ por lo cual existe un $\bar{x} \in B$ que esta en la bola y $B(\bar{x}, \frac{\epsilon}{2}) \subseteq B(x, \epsilon) \subset A$ por lo que $\bar{x} \in int(A)$ contradicción.

h) $\bar{A} = \mathbf{E}$ y $int(B) \cap A = \emptyset \ \Rightarrow \ int(B) \neq \emptyset$
Demostración:
Supongamos que $\exists x \in int(B) \ \Rightarrow \ \exists \epsilon > 0 \ t'q. \ B(x,\epsilon) \subseteq int(B)$ y entonces $B(x,\epsilon) \cap A \subseteq int(B) \cap A = \emptyset$ lo cual implica que $x \notin \bar{A}$ contradicción.

i) $int(A^c) \ = \ \bar{A}^c$ Demostración:

$$\begin{aligned} \bar{A}^c &= \{x \in \mathbf{E} \ / \ \forall \epsilon > 0 \ B(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset\}^c \\ &= \{x \in \mathbf{E} \ / \ \exists \epsilon > 0 \ t'q. \ B(x,\epsilon) \cap A = \emptyset\} \\ &= \{x \in \mathbf{E} \ / \ \exists \epsilon > 0 \ t'q. \ B(x,\epsilon) \subseteq A^c\} \\ &= int(A^c) \end{aligned}$$

j) $\overline{A^c} \ = \ (int(A))^c \ (\Leftrightarrow \ \overline{A^c}^c = int(A))$
Demostración: $\overline{A^c}^c \ =^{(i)} int(A^{c^c}) \ = \ int(A)$

P11 Por demostrar que: $\bar{A} \ = \ \{x \in \mathbf{E} \ / \ d_A(x) = 0\}$
Demostracón:

$\subseteq$] Sea $x \in \bar{A} \ \Rightarrow \ \forall \epsilon > 0 \ B(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$.
Tomando $\epsilon = \frac{1}{n} \ \Rightarrow \ \forall \ n \in \mathbb{N} \ B(x,\frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset \ \Rightarrow \ \exists \ x_n \in B(x,\frac{1}{n}) \cap A$
Lo cual implica que: $x_n \in A$ y $\|x - x_n\| \leq \frac{1}{n} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ y se tiene que:

$$d_A(x) = \text{ínf}\{\|x-y\| \, , \ y \in A\} \leq \ \text{ínf}\{\|x - x_n\| \, , \ n \in \mathbb{N}\} \ = 0$$

$\supseteq$] Sea $x \ / \ d_A(x) = 0$ como $d_A(x) = \text{ínf}\{\|x-y\| \, , \ y \in A\}$

$$\Rightarrow \ \forall \epsilon > 0 \ \exists y \in A \ / \ \|x-y\| \leq \epsilon \ \Rightarrow \ B(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \ x \in \bar{A}$$

P12 Sea $A \ / \ \bar{A} = \mathbf{E} \ y \ int(A) = \emptyset$
Entonces por el P10(i) $int(A^c) \ = \ \overline{A}^c \ = \ \mathbf{E}^c \ = \ \emptyset$
y por P10(j) $\overline{A^c} \ = \ (int(A))^c \ = \ \emptyset^c \ = \ \mathbf{E}$

P13 Veamos que es $\|f_k - f_l\|_1$

$$\|f_k - f_l\|_1 = \int_0^1 |f_k - f_l|$$

$$= \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} |f_k - f_l|}_{} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^l}} |f_k - f_l|}_{} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^l}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^k}} |f_k - f_l|}_{} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^k}}^{1} |f_k - f_l|}_{}$$

$$= 0 + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^l}} (-2^l(x+\frac{1}{2})+1) - (-2^k(x+\frac{1}{2})+1)dx \quad + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^l}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^k}} (-2^k(x+\frac{1}{2})+1)dx + 0$$

$$\leq \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^l}} 1dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^l}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^k}} 1dx = \frac{1}{2^k}$$

Por lo tanto es de Cauchy pues $\forall \delta > 0\ \exists k \in \mathbb{N} \diagup \frac{1}{2^k} < \delta$ y $\forall n, m \geq k\ \|f_n - f_m\|_1 \leq \delta$ pero esta sucesión no es convergente pues su limite seria:

$$f(x) = \left\{ \begin{matrix} 1\ si\ x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0\ si\ x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{matrix} \right\} \notin C([0,1], \mathbb{R})$$

P14 La sucesion anterior no es convergente en la $\| \|_\infty$ pues puntualmente converge a la f anterior pero $\|f - f_n\| = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, es cosa de tomar una sucesión que se acerque a $\frac{1}{2}$ por la derecha para comprobar esto.

P15 veamos que $int(P) = \emptyset$
sea $\epsilon > 0$ y $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in P$ como $x \in P \Rightarrow x_k \to 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \diagup \forall n \geq N\ x_n \leq \frac{\epsilon}{3}$ entonces sea $K \in \mathbb{N},\ K \geq N$ y sea $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definida como :

$$y_k = \begin{cases} x_k\ si & k \neq K \\ -x_k\ si & k = K \end{cases}$$

entonces $\|\{(y-x)_k\}_{k\in\mathbb{N}}\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |y_k - x_k| = |y_K - x_K| \leq \frac{2\epsilon}{3}$
Por lo cual $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in B(x,\epsilon)$ y $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \notin P$ lo que quiere decir que ningun punto de P esta en su interior.

P16 en efecto sea $\{\{y_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucssión en l_1 (i.e. los $\{y_k^n\}_{k\in\mathbb{N}} \in l_1$). t'q. $y_k^n = 0$ si $n \neq k$ y $y_n^n = 1$ esta sucesión (de sucesiones) esta contenida en $B(0,1)$ y no tiene ningun punto de acumulacion, (pues no tiene ninguna subsucesion de Cauchy).

P17 Sea C compacto y $D \subseteq C$ cerrado.
Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en D entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ por lo cual tiene un punto de acumulación $\bar{x}$ en C y por consiguiente una subsucesión convergiendo a este punto, llamemos

a la subsucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y esta subsucesión es convergente y esta contenida en D por lo cual su limite esta en D pues este es un conjunto cerrado. i.e. $\bar{x} \in D$ lo que implica que D es compacto.

P18 Sea C compacto y D cerrado.
Entonces como C es compacto $\Rightarrow C$ es cerrado $\Rightarrow C \cap D$ es cerrado y $C \cap D \subseteq C$ por el problema anterior se tiene que $C \cap D$ es compacto.

P19 Supongamos que para toda sub-familia finita $\{A_{i_j}\}_{j=i}^{n}$ se tiene que $\bigcap\limits_{j=1}^{n} A_{i_j} \neq \emptyset$.

Tomemos las sub-familias finitas de la forma $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ entonces se comple que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$.

por lo tanto existe $x_n \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ y de esta forma obtenemos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A_1$ por lo tanto tiene una subsucesion convergente a un punto de A_1 llamemos a este punto $\bar{x}$ procederemos a demostrar que $\bar{x} \in A_i\ \forall i \in \mathbb{N}$. Sea $i \in \mathbb{N}$ entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\geq i} \subseteq \bigcap\limits_{j=1}^{n} A_j$ y como tiene una subsucesión convergente a $\bar{x}$ y $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ es cerrado $\bar{x} \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ en particular $\bar{x} \in A_i$ como esto se tiene para un i cualquiera se tiene para todos. lo que implica que:

$$\bar{x} \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\ ,\ contradiccion$$

P20 Supongamos que para toda sub-familia finita $\{A_{i_j}\}_{j=1}^{n}$ se tiene que: $A \not\subseteq \bigcap\limits_{j=1}^{n} A_{i_j}$.

tomemos la sub-familias finitas de la forma $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ como $A \not\subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\ \exists x_n \in A \diagdown \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ de esta maneraa obtenemos la sucesón $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ por lo que $\exists x \in A$ punto de acumulacin de la sucesión (pues A es compacto). pero como

$$x \in A \subseteq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\ \Rightarrow\ \exists k \in \mathbb{N} \diagup x \in A_k$$

Y como A_k es abierto existe $\epsilon > 0 \diagup B(x,\epsilon) \subseteq A_k \Rightarrow\ \{x_n\}_{n\geq k} \cap B(x,\epsilon) \subseteq \{x_n\}_{n\geq k} \cap A_k = \emptyset$ contradicción con el hecho de que x es punto de acumulación.

P21 para este problema consideramos la familia $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ con $A_i = (-1, 1-\frac{1}{i})\ \forall i \in \mathbb{N}$ y se cumple que $[0,1) \subseteq \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_1 = (-1,1)$ y para toda subfamilia finita existe un x lo suficientemente cercano a 1 tal que no esta en la unión.

P22 en efecto sea $x_i \in A_i \ \Rightarrow$ la sucesión $\{x_i\} \ \subseteq A_1 \ \Rightarrow$ tiene un punto de acumulación $x \in A_1$ como x es punto de acumulación de la sucesión $\{x_n\}_{x\geq 1}$ lo es tambien de las subsucesiones de la forma $\{x_n\}_{n\geq i}$ que estan contenidas en A_i respectivamente por lo tanto $x \in A_i\ \forall i \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow x\ \in\ \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\ \ contradiccion.$$

P23 a) Sea $A_i = (0, \frac{1}{i})$

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} = A_n \; \forall n \in \mathbb{N}$ y por otra parte $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \; = \; \emptyset$

b) Sea $B_i = [i, \infty) \; \Rightarrow \; \bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i$

[1]

[1] Hecho por Gonzalo Sánchez