

Ejercicios capítulo 2

PROFESORES: RAFAEL CORREA, PEDRO GAJARDO
 AUXILIARES: GONZALO SÁNCHEZ, RODOLFO GAINZA

- Sea f una función continua definida en un e.v.n. \vec{E} con valores en un e.v.n. \vec{F} . Demuestre que
 - Si $B \subset \vec{F}$ es cerrado, entonces $f^{-1}[B] \subset \vec{E}$ también es cerrado.
 - Si $B \subset \vec{F}$ es abierto, entonces $f^{-1}[B] \subset \vec{E}$ también es abierto.
 - $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ para todo $A \subset \vec{E}$.
 - $f^{-1}[\text{int}B] \subset \text{int}(f^{-1}[B])$ para todo $B \subset \vec{F}$.
 - $\overline{f^{-1}[B]} \subset f^{-1}[\bar{B}]$ para todo $B \subset \vec{F}$.
- Demuestre que la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(\vec{x}) = \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}$ si $\vec{x} \neq \vec{0}$ y $f(\vec{0}) = 0$ es continua en todo punto de \mathbb{R}^2 salvo en $\vec{0}$.
- Demuestre que la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(\vec{x}) = \frac{x_1 x_2}{\|\vec{x}\|_2}$ si $\vec{x} \neq \vec{0}$ y $f(\vec{0}) = 0$, es continua.
- Demuestre que la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x}\|_2}(x_1^2, x_2^2)$ si $\vec{x} \neq \vec{0}$ y $f(\vec{0}) = \vec{0}$, es continua.
- Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(\vec{x}) = \frac{x_1 x_2}{\|\vec{x}\|_2}$. Demuestre que $\lim_{x_1 \rightarrow 0} (\lim_{x_2 \rightarrow 0} f(\vec{x})) = \lim_{x_2 \rightarrow 0} (\lim_{x_1 \rightarrow 0} f(\vec{x})) = 0$ y que $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{x})$ no existe.
- Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(\vec{x}) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{\|\vec{x}\|_2^2}$. Demuestre que $\lim_{x_2 \rightarrow 0} (\lim_{x_1 \rightarrow 0} f(\vec{x})) = -1$, $\lim_{x_1 \rightarrow 0} (\lim_{x_2 \rightarrow 0} f(\vec{x})) = 1$ y, que $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{x})$ no existe.
- Sea f una función continua definida en un e.v.n. \vec{E} con valores en un e.v.n. \vec{F} . Demuestre que el conjunto $G(f) = \{(\vec{x}, \vec{y}) \in \vec{E} \times \vec{F} : \vec{y} = f(\vec{x})\}$ es cerrado en el e.v.n. $\vec{E} \times \vec{F}$.
- Sean f, g dos funciones continuas definidas en un e.v.n. \vec{E} con valores en un e.v.n. \vec{F} y, sea $A \subset \vec{E}$ tal que $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in A$. Demuestre que $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in \bar{A}$.
- Sean $\vec{E}_1, \dots, \vec{E}_n$ espacios vectoriales normados y sea p_i la función del e.v.n. $\vec{E} = \vec{E}_1 \times \dots \times \vec{E}_n$ en \vec{E}_i , que a cada $\vec{x} \in \vec{E}$ le asocia su componente $\vec{x}_i \in \vec{E}_i$. Demuestre que esta función es continua.

10. Sea f una función continua definida en un e.v.n. \vec{E} con valores en \mathbb{R} . Demuestre que
- $S_\lambda = \{\vec{x} \in \vec{E} : f(\vec{x}) \leq \lambda\}$ es un conjunto cerrado para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - $I_\lambda = \{\vec{x} \in \vec{E} : f(\vec{x}) = \lambda\}$ es un conjunto cerrado para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - $A_\lambda = \{\vec{x} \in \vec{E} : f(\vec{x}) < \lambda\}$ es un conjunto abierto para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
11. Sea f una función continua y biyectiva, de un compacto A de un e.v.n. \vec{E} en un conjunto B de un e.v.n. \vec{F} . Demuestre que la función $f^{-1} : B \rightarrow A$ es continua.
12. Sea f una función continua definida en \mathbb{R}^n con valores en \mathbb{R} . Si f verifica la propiedad: para todo $L \in \mathbb{R}_+$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\vec{x}\| \geq k_0 \Rightarrow f(\vec{x}) \geq L$, demuestre que el conjunto S_λ definido en el Ejercicio 10 es un compacto y que la función f alcanza su mínimo en \mathbb{R}^n .
13. Dado un e.v.n. \vec{E} y dos puntos $\vec{a}, \vec{b} \in \vec{E}$ demuestre que la función $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \in \vec{E}$ es continua. Con esto, demuestre que el intervalo $[\vec{a}, \vec{b}] = \{\vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \in \vec{E} : \lambda \in [0, 1]\}$ es compacto.
14. Demuestre que la función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua pero no es Lipschitziana.
15. Demuestre que toda función Lipschitziana es uniformemente continua.
16. Sea f una función uniformemente continua en una parte A de un e.v.n. \vec{E} con valores en un e.v.n. \vec{F} . Demuestre que si $\{\vec{x}_k\}$ es una sucesión de Cauchy en A , entonces $\{f(\vec{x}_k)\}$ es una sucesión de Cauchy en \vec{F} . Demuestre que esta propiedad no se tiene necesariamente si f no es uniformemente continua en A .
17. Sea l una función lineal definida en un e.v.n. \vec{E} con valores en \mathbb{R} . Demostrar que l es continua si y solo si el conjunto $N(l) := \{\vec{x} \in \vec{E} : l(\vec{x}) = 0\}$ es cerrado en \vec{E} .
18. Sea l una función lineal definida en el e.v.n. $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ con valores en \mathbb{R} , por $l(f) = \int_a^b f(x) dx$. Demuestre que l es continua.
19. Sea l una función lineal definida en el e.v.n. $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ con valores en \mathbb{R} , por $l(f) = \int_a^b g(x)f(x) dx$, donde g es una función fija en $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Demuestre que l es continua.
20. Sea l una función lineal definida en el e.v.n. $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ con valores en \mathbb{R} , por $l(f) = f(0)$. Considere en $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ la sucesión $\{f_n\}$ definida por $f_n(x) = 1 - nx$ si $x \in [0, 1/n]$, $f_n(x) = 0$ si $x \in [1/n, 1]$. Usando esta sucesión demuestre que l no es continua.
21. Usando el teorema del punto fijo de Banach demuestre que dado $\alpha > 0$, la sucesión $\{x_k\}$ construída por la fórmula recurrente $x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{\alpha}{x_k} \right)$, a partir de un valor $x_1 \geq \sqrt{\alpha}$, converge a $\sqrt{\alpha}$.

Anexo capítulo 2 del apunte del curso MA22A año 2005

PROFESORES: RAFAEL CORREA, PEDRO GAJARDO

AUXILIARES: GONZALO SÁNCHEZ, RODOLFO GAINZA

- P1 a) Sea $B \subseteq \vec{F}$ cerrado. Sea $(\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq f^{-1}(B)$ convergente a $\vec{x} \in \vec{E}$.
Como f es continua,

$$\vec{x}_n \longrightarrow \vec{x} \Rightarrow f(\vec{x}_n) \longrightarrow f(\vec{x})$$

Además $f(\vec{x}_n) \in B \quad \forall n \in \mathbb{N}$, y B es cerrado.

$$\Rightarrow f(\vec{x}) \in B \Rightarrow \vec{x} \in f^{-1}(B) \Rightarrow f^{-1}(B) \text{ es cerrado.}$$

- b) Sea $B \subseteq \vec{F}$ abierto. Sea $\vec{x} \in f^{-1}(B)$. Como B es abierto, $\exists \varepsilon > 0$ tal que:
 $\mathcal{B}(f(\vec{x}), \varepsilon) \subseteq B$. Pero como f es continua,

$$(\exists \delta > 0) \text{ tal que } f(\mathcal{B}(\vec{x}, \delta)) \subseteq \mathcal{B}(f(\vec{x}), \varepsilon) \subseteq B$$

luego:

$$\mathcal{B}(\vec{x}, \delta) \subseteq f^{-1}(B) \Rightarrow f^{-1}(B) \text{ es abierto.}$$

- c) Sea $A \subseteq \vec{E}$. Sea $\vec{y} \in f(\overline{A}) \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in \overline{A}$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{y}$.
Como f es continua,

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) \text{ tal que } f(\mathcal{B}(\vec{x}, \delta)) \subseteq \mathcal{B}(f(\vec{x}), \varepsilon) \subseteq B.$$

Además como $\vec{x} \in \overline{A}$, $\forall \mathcal{B}(\vec{x}, \eta)$, $\mathcal{B}(\vec{x}, \eta) \cap A \neq \phi$.

$$\Rightarrow \phi \neq f(\mathcal{B}(\vec{x}, \delta)) \cap A \subseteq f(\mathcal{B}(\vec{x}, \delta)) \cap f(A) \subseteq \mathcal{B}(f(\vec{x}), \varepsilon) \cap f(A)$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}(\vec{y}, \varepsilon) \cap f(A) \neq \phi \Rightarrow \vec{y} \in \overline{f(A)}.$$

- d) Sea $B \subseteq \vec{F}$. Por (ii) $f^{-1}(\overset{\circ}{B})$ es abierto. Además $\overset{\circ}{B} \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subseteq f^{-1}(B)$.
Y como $f^{-1}(\overset{\circ}{B})$ es el abierto más grande contenido en $B \Rightarrow f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subseteq f^{-1}(\overset{\circ}{B})$.
e) Sea $B \subseteq \vec{F}$. Como $B \subseteq \overline{B} \Rightarrow f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(\overline{B})$, este último es cerrado por (i).
Ahora bien $f^{-1}(\overset{\circ}{B})$ es el cerrado más chico que contiene a $f^{-1}(B)$
 $\Rightarrow \overline{f^{-1}(\overset{\circ}{B})} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

P2 Por álgebra de funciones continuas, f es continua en todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Para estudiar la continuidad en el punto $\{(0, 0)\}$ consideremos la sucesión siguiente:

$\vec{x}_n = \{(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})\} \longrightarrow \{(0, 0)\}$, con esto:

$$f(\vec{x}_n) = \frac{(\frac{1}{n^2}) * (\frac{1}{n})^2}{(\frac{1}{n^2})^2 + (\frac{1}{n})^4} = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{2}{n^4}} = \frac{1}{2}$$

Luego, $f(\vec{x}_n) \longrightarrow \frac{1}{2} \neq 0$, por lo que f no es continua en 0.

P3 Por álgebra de funciones continuas, f es continua en todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Para estudiar la continuidad en el punto $\{(0, 0)\}$, sea $(\vec{x}^n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$, $(\vec{x}^n) \longrightarrow \{(0, 0)\}$

$$0 \leq |f(\vec{x}^n)| = \left| \frac{x_1^n * x_2^n}{\|\vec{x}^n\|} \right| = \left| \frac{x_1^n * x_2^n}{\sqrt{(x_1^n)^2 + (x_2^n)^2}} \right|$$

Pero como $a^2 + b^2 \geq 2ab$

$$0 \leq |f(\vec{x}^n)| \leq \left| \frac{x_1^n * x_2^n}{\sqrt{2 * x_1^n * x_2^n}} \right| = \left| \frac{\sqrt{x_1^n * x_2^n}}{\sqrt{2}} \right| \longrightarrow 0$$

Luego, f es continua en 0.

P4 Para $\vec{x} \neq 0$ cada una de las funciones componentes es continua, por álgebra de funciones continuas. Para $\vec{x} = 0$ basta estudiar una de las funciones componentes, pues son analogas. Sea $(\vec{x}^n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$, $(\vec{x}^n) \longrightarrow \{(0, 0)\}$

$$0 \leq f_1(\vec{x}^n) = \frac{(x_1^n)^2}{\|\vec{x}^n\|} = \frac{(x_1^n)^2}{\sqrt{(x_1^n)^2 + (x_2^n)^2}} \leq \frac{(x_1^n)^2}{\sqrt{(x_1^n)^2}} = |x_1^n| \longrightarrow 0$$

Por lo tanto,

$$f_1(\vec{x}^n) \longrightarrow 0 \quad \text{y} \quad f_2(\vec{x}^n) \longrightarrow 0$$

Con lo que

$$f(\vec{x}^n) \longrightarrow (0, 0) \quad \Rightarrow \quad f \text{ es continua en } 0$$

P5 Sea $(\vec{x}) = (x_1, x_2)$, se tiene:

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(\vec{x}) = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{x_1 * x_2}{x_1^2 + x_2^2} = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1 * 0}{x_1^2 + 0^2} = \lim_{x_1 \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(\vec{x}) = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1 * x_2}{x_1^2 + x_2^2} = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{0 * x_2}{0^2 + x_2^2} = \lim_{x_2 \rightarrow 0} 0 = 0$$

Notemos ahora que,

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{x}) \quad \text{no existe.}$$

Si el límite existiera se tendría:

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(\vec{x}) = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(\vec{x}) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{x})$$

Pero, notemos que no es así, sea $(\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((\frac{1}{n}), (\frac{1}{n})) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$, se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{1}{n}) * (\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{x}) \text{ no existe.}$$

P6 Sea $(\vec{x}) = (x_1, x_2)$, se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(\vec{x}) &= \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^2 - 0^2}{x_1^2 + 0^2} = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^2}{x_1^2} = \lim_{x_1 \rightarrow 0} 1 = 1 \\ \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(\vec{x}) &= \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{0^2 - x_2^2}{0^2 + x_2^2} = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{-x_2^2}{x_2^2} = \lim_{x_2 \rightarrow 0} -1 = -1 \end{aligned}$$

Como los límites son distintos, $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{x})$ no existe.

P7 Sea $(\vec{x}_n, \vec{y}_n) \in G(f)$ convergente a $(\vec{x}^*, \vec{y}^*) \in \vec{E} \times \vec{F}$ es decir,

$$\vec{x}_n \longrightarrow \vec{x}^* \quad \text{y} \quad \vec{y}_n \longrightarrow \vec{y}^*$$

por la definición de $G(f)$ $f(\vec{x}_n) = \vec{y}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ahora bien, como f es continua,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n) = f(\vec{x}^*)$$

Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{y}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n) = f(\vec{x}^*) = \vec{y}^*$$

Por lo tanto $(\vec{x}^*, \vec{y}^*) \in G(f) \Rightarrow G(f)$ es cerrado.

P8 Sea $\vec{x}^* \in \overline{A}$, y sea $\vec{x}_n \longrightarrow \vec{x}^*$, con $\vec{x}_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Como f y g son continuas, $f - g$ es continua, y verifica que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (f - g)(\vec{x}_n) = 0$$

En el límite, se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f - g)(\vec{x}_n) = (f - g)(\vec{x}^*) \\ \Rightarrow f(\vec{x}^*) &= g(\vec{x}^*) \Rightarrow f(\vec{x}) = g(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \overline{A} \end{aligned}$$

P9 Sea $\vec{x}^* \in \vec{E}$, $\vec{x}^* = (\vec{x}_1^*, \vec{x}_2^*, \dots, \vec{x}_n^*)$, y sea $\varepsilon > 0$
 Ocupando $\|\cdot\|_\infty$, tomamos $\delta = \varepsilon$ y tenemos:

$$\text{Si } \vec{y} \in p_i(\mathcal{B}(\vec{x}^*, \delta)) \Rightarrow \exists \vec{x} \in \mathcal{B}(\vec{x}^*, \delta) \text{ tal que } p_i(\vec{x}) = \vec{y}$$

Además se tiene

$$\|\vec{y} - p_i(\vec{x}^*)\| \leq \|\vec{x} - \vec{x}^*\|_\infty < \delta \Rightarrow \|\vec{y} - p_i(\vec{x}^*)\| < \delta = \varepsilon \Rightarrow \vec{y} \in \mathcal{B}(p_i(\vec{x}^*), \varepsilon)$$

Por lo tanto, p_i es continua.

P10 a) Sea $(\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S_\lambda$ convergente a $\vec{x} \in \vec{E} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad f(\vec{x}_n) \leq \lambda$
 Ocupando la continuidad de f

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n) = f(\vec{x})$$

Supongamos $f(\vec{x}) > \lambda$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } f(\vec{x}) - \lambda \geq \varepsilon$$

Pero

$$f(\vec{x}_n) \longrightarrow f(\vec{x}) \Rightarrow \exists N > 0 \text{ tal que } \|f(\vec{x}_n) - f(\vec{x})\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} + f(\vec{x}_n) < f(\vec{x}) < \frac{\varepsilon}{2} + f(\vec{x}_n) \Rightarrow f(\vec{x}_n) + \frac{\varepsilon}{2} - \lambda \geq \varepsilon$$

$$\Rightarrow f(\vec{x}_n) + -\lambda \geq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N \Rightarrow f(\vec{x}_n) > \lambda \quad \forall n > N \quad \text{---}$$

$$\Rightarrow f(\vec{x} \leq \lambda \Rightarrow \vec{x} \in S_\lambda)$$

b) Sea $(\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I_\lambda$, convergente a $\vec{x}^* \in \vec{E} \Rightarrow f(\vec{x}_n) = \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
 Como f es continua,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n) = f(\vec{x}^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda = \lambda \Rightarrow \vec{x}^* \in I_\lambda \Rightarrow I_\lambda \text{ es cerrado.}$$

c) Sea $\vec{x} \in A_\lambda \Rightarrow f(\vec{x}) < \lambda$. Luego,

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } \lambda - f(\vec{x}) = \frac{\varepsilon}{2}$$

Como f continua en \vec{x} ,

$$\exists \delta > 0 \text{ tal que } \|\vec{y} - \vec{x}\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{y}) - f(\vec{x})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego, $\forall \vec{y} \in \mathcal{B}(\vec{x}, \delta)$,

$$f(\vec{y}) - \lambda = f(\vec{y}) - f(\vec{x}) + f(\vec{x}) - \lambda < \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 0$$

$$\Rightarrow f(\vec{y}) < \lambda \Rightarrow \vec{y} \in A_\lambda \Rightarrow A_\lambda \text{ es abierto.}$$

P11 Sea $(\vec{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en B convergente a \vec{y}^* .

$$f \text{ biyectiva} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \vec{x}_n \in A \text{ tal que } f(\vec{x}_n) = \vec{y}_n$$

Como $(\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en A , y este es compacto, $(\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene un punto de acumulación $\vec{z} \in A$. Sea $(\vec{x}_{\alpha(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ subsucesión de $(\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, convergente a \vec{z} . Como f es continua

$$\vec{y}_{\alpha(n)} = f(\vec{x}_{\alpha(n)}) \longrightarrow f(\vec{z}) \Rightarrow f(\vec{z}) = \vec{y}^*$$

y por inyectividad \vec{z} es único.

$$\Rightarrow (\vec{x}_n) \longrightarrow \vec{z} \Rightarrow f^{-1}(\vec{y}_n) \longrightarrow f^{-1}(\vec{y}^*) \Rightarrow f^{-1} \text{ es continua.}$$

P12 Notemos que como $S_\lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ para mostrar que es compacto, basta mostrar que S_λ es cerrado y acotado. Por el problema 10 sabemos que S_λ es cerrado. Por la propiedad, para $L = \lambda + 1$

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ tal que } \|\vec{x}\| \geq M \Rightarrow f(\vec{x}) \geq L = \lambda + 1$$

Suponiendo S_λ no acotado, $\exists \vec{x}_M \in S_\lambda$ tal que $\|\vec{x}_M\| \geq M$

$$\Rightarrow f(\vec{x}_M) \geq \lambda + 1 \Rightarrow \vec{x}_M \notin S_\lambda \text{ ---}$$

Así se tiene S_λ acotado, con lo que se concluye, S_λ compacto.

Como f es continua, alcanza su mínimo en S_λ es decir

$$\exists \vec{x}^* \in S_\lambda \text{ tal que } f(\vec{x}^*) \leq f(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in S_\lambda$$

Además para $\vec{y} \in S_\lambda^c$ $f(\vec{y}) > \lambda$ luego se tiene:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}^*) \leq f(\vec{x}) \leq \lambda < f(\vec{y}) \quad \forall \vec{x} \in S_\lambda \quad \forall \vec{y} \in S_\lambda^c \\ \Rightarrow f(\vec{x}^*) \leq f(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

P13 Sea $h_{\vec{a}\vec{b}} : \mathbb{R} \longrightarrow \vec{E}$ definida por $h_{\vec{a}\vec{b}}(\lambda) = \vec{a} + \lambda * (\vec{b} - \vec{a})$

Sea $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ y $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow \bar{\lambda}$, $\lambda_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} h_{\vec{a}\vec{b}}(\lambda_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{a} + \lambda_n * (\vec{b} - \vec{a})) = \vec{a} + \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n * (\vec{b} - \vec{a})) \\ &= \vec{a} + \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n)(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} + (\bar{\lambda})(\vec{b} - \vec{a}) = h_{\vec{a}\vec{b}}(\bar{\lambda}) \end{aligned}$$

Por lo que $h_{\vec{a}\vec{b}}$ es continua. Notemos además que $h_{\vec{a}\vec{b}}([0, 1]) = [\vec{a}, \vec{b}]$:

$$\vec{x} \in h_{\vec{a}\vec{b}}([0, 1]) \Leftrightarrow \exists \lambda \in [0, 1], h_{\vec{a}\vec{b}}(\lambda) = \vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{a} + \lambda * (\vec{b} - \vec{a}) \Leftrightarrow \vec{x} \in [\vec{a}, \vec{b}]$$

Luego, como $[0, 1]$ es compacto y $h_{\vec{a}\vec{b}}$ es continua, $h_{\vec{a}\vec{b}}([0, 1]) = [\vec{a}, \vec{b}]$ es compacto.

P14 En el intervalo $[0, \frac{1}{4}]$ la función \sqrt{x} es continua, y como $[0, \frac{1}{4}]$ es compacto, es uniformemente continua.

Para $x \geq y \geq \frac{1}{4}$ notemos que:

$$\frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x - y|} = \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{\xi}} \quad \xi \in [y, x]$$

Como $\xi \in [y, x] \subseteq [\frac{1}{4}, +\infty[$

$$\Rightarrow \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x - y|} \leq \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 1$$

Luego, se tiene que en $[\frac{1}{4}, +\infty[$ es Lipschitz, por lo tanto, uniformemente continua.

Así en \mathbb{R}_+ es uniformemente continua.

Para ver que no es Lipschitziana en \mathbb{R}_+ notemos que con $x = \frac{1}{n^2}$, $y = 0$

$$\frac{|\sqrt{\frac{1}{n^2}} - \sqrt{0}|}{|\frac{1}{n^2} - 0|} = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$$

Como n es arbitrario, vemos que el cociente no es acotado, por lo que no es Lipschitz.

P15 Como f Lipschitziana, $\exists M > 0$ tal que:

$$\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \leq M * \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Sea $\varepsilon > 0$. Con $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| \leq \delta = \frac{\varepsilon}{M}$$

$$\Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \leq M * \|\vec{x} - \vec{y}\| \leq M * \delta = M * \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Con lo que se concluye que f es uniformemente continua.

P16 Sea $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en A . Como f es uniformemente continua.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad \|\vec{x} - \vec{y}\| \leq \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \leq \varepsilon$$

Como (\vec{x}_k) es de Cauchy,

$$\exists N > 0 \quad \text{tal que} \quad \forall n, m > N \quad \|\vec{x}_n - \vec{x}_m\| \leq \delta$$

$$\Rightarrow \|f(\vec{x}_n) - f(\vec{x}_m)\| \leq \varepsilon$$

Por lo que $(f(\vec{x}_k))_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Para ver un contraejemplo, basta considerar la función \ln y la sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq]0, 1[$ con $(x_k) = \frac{1}{k}$ que es de Cauchy.

$$|\ln(x_n) - \ln(x_m)| = \left| \ln\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{1}{m}\right) \right| = |\ln(1) - \ln(n) - \ln(1) + \ln(m)| = \left| \ln\left(\frac{m}{n}\right) \right|$$

Luego, $(\ln(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ no es de Cauchy.

P17 Si ℓ es continua, basta notar que $N(\ell) = \ell^{-1}(\{0\})$. Y como un punto en \mathbb{R} es cerrado, y la preimagen por una función continua de un cerrado, es cerrado, se concluye.

Para la otra implicancia, supongamos que ℓ no es continua. Luego

$$\exists (\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \vec{E} \quad \text{tal que} \quad \frac{\|\ell(\vec{x}_k)\|}{\|\vec{x}_k\|} \longrightarrow +\infty \Rightarrow \frac{\|\ell(\vec{x}_k)\|}{\|\vec{x}_k\|} = \alpha_k \longrightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \exists (\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \vec{E} \quad \text{tal que} \quad \|\vec{x}_k\| = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad |\ell(\vec{x}_k)| = \alpha_k \longrightarrow +\infty$$

Sea $\vec{a} \in \vec{E}$ tal que $\ell(\vec{a}) = \alpha \neq 0$

$$\Rightarrow \vec{y}_k = \frac{\vec{x}_k}{\alpha_k} - \frac{\vec{a}}{\alpha} \in N(\ell)$$

y además.

$$\vec{y}_k \longrightarrow \frac{-\vec{a}}{\alpha} \quad \text{y} \quad \ell\left(\frac{-\vec{a}}{\alpha}\right) = -1 \neq 0$$

Pues $\vec{y}_k \in N(\ell) \quad \forall k \in \mathbb{N}$, que es cerrado.

P18 Basta notar que:

$$|\ell(f)| = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx = \|f\|_1$$

Luego, ℓ es continua.

P19 Se Tiene:

$$\begin{aligned} |\ell(f)| &= \left| \int_a^b (g * f)(x) dx \right| \leq \int_a^b |(g * f)(x)| dx = \int_a^b |g(x)| * |f(x)| dx \\ &\leq \sup_{x \in [a, b]} f(x) * \int_a^b |g(x)| dx = \|f\|_\infty \int_a^b |g(x)| dx \end{aligned}$$

Luego, ℓ es continua.

P20 Veamos que $f_n \longrightarrow \vec{0}$ donde $\vec{0}$ es la función constante 0.

$$\begin{aligned} \|f_n - 0\|_1 &= \int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n(x)| dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 |f_n(x)| dx = \int_0^{\frac{1}{n}} |1 - n * x| dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 |0| dx \\ &= x - \frac{n}{2} * x^2 \Big|_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} - \frac{n}{2} * \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2 * n} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Pero

$$\ell(f_n) = f_n(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \ell(\vec{0}) = 0$$

Luego, ℓ no es continua en 0.

P21 Definamos $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{\alpha}{x})$. Como $f'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{\alpha}{x^2})$ para $x > \sqrt{\alpha}$ es positiva
 $\Rightarrow f$ es monotonamente creciente en $[\sqrt{\alpha}, +\infty[$

Además $f(\sqrt{\alpha}) = \sqrt{\alpha} \Rightarrow f([\sqrt{\alpha}, +\infty[) \subseteq [\sqrt{\alpha}, +\infty[$.

Para ver que es contractante,

$$x \geq y \geq 0 \quad \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = f'(\xi) \quad \xi \in [y, x] \subseteq [\sqrt{\alpha}, +\infty[$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{x^2}\right) \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{\xi^2}\right) \leq \frac{1}{2}$$

Por lo tanto f tiene constante de Lipschitz menor o igual a $\frac{1}{2}$. Ocupando el teorema de punto fijo de Banach, f posee un único punto fijo, y es $\sqrt{\alpha}$.

Pero si

$$x_k \geq \sqrt{\alpha} \Rightarrow \frac{\alpha}{x_k} \leq \sqrt{\alpha} \leq x_k$$

$$\Rightarrow x_{k+1} - x_k = \frac{1}{2} * \left(x_k + \frac{\alpha}{x_k} - 2 * x_k\right) = \frac{1}{2} * \left(-x_k + \frac{\alpha}{x_k}\right) \leq 0$$

Por lo que x_k es monotonamente decreciente, y acotada por 0 $\Rightarrow x_k$ es convergente. Por lo tanto converge al único punto fijo de f , $\sqrt{\alpha}$.