Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas U. de Chile

Ejercicios capitulo 3

PROFESORES: RAFAEL CORREA, PEDRO GAJARDO

AUXILIARES: GONZALO SÁNCHEZ, RODOLFO GAINZA

1. Estudiar la convergencia puntual, la convergencia uniforme y la convergencia para la norma $\|\cdot\|_1$, de las siguientes sucesiones de funciones en $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ para f_k definidas de a) a e) y en $\mathcal{C}([0,2],\mathbb{R})$ para f_k definida en f).

   a) $f_k(x) = \frac{\sin(kx)}{k}$

   b) $f_k(x) = xe^{-kx}$

   c) $f_k(x) = \begin{cases} kx & \text{si } x \in [0,1/k] \\ (kx)^{-1} & \text{si } x \in [1/k,1] \end{cases}$

   d) $f_k(x) = kxe^{-kx}$

   e) $f_k(x) = \frac{kx^2}{1+kx}$

   f) $f_k(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [0,1-1/k] \\ kx-k & \text{si } x \in [1-1/k,1+1/k] \\ 1 & \text{si } x \in [1+1/k,2] \end{cases}$

2. Demuestre que si $\{f_k\}$ es una sucesión en $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ uniformemente convergente a una función f, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_k \int_a^b f_k(x)dx.$$

3. Sean $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ dos sucesiones de funciones en $\mathcal{A}(A,\mathbb{R})$ uniformemente convergentes a f y g respectivamente. Demuestre que la sucesión $\{h_n\}$ definida por $h_n := f_n \cdot g_n$ es uniformemente convergente a la función $h = f \cdot g$.

4. Sea $\vec{F}$ un e.v.n., $\{f_n\}$ una sucesión en $\mathcal{A}(A,\vec{F})$ uniformemente convergente a una función f y $\{g_n\}$ una sucesión de funciones de A en $\vec{F}$ que verifica $\|f_n - g_n\|_\infty \to 0$. Demuestre que la sucesión $\{g_n\}$ está en $\mathcal{A}(A,\vec{F})$ y converge uniformemente a la función f.

5. Sea $\{p_n\}$ una sucesión de polinomios de una variable real definidos por la formula recurrente

$$p_1 = 0,\ p_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(x + 2p_n(x) - p_n(x)^2).$$

   Demuestre que para todo $x \in [0,1]$ se tiene

$$0 \leq \sqrt{x} - p_n(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}}$$

y que la sucesión $\{p_n\}$ en $\mathcal{A}([0,1],\mathbb{R})$ converge uniformemente a la función f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas U. de Chile

Ejercicios capitulo 3

PROFESORES: RAFAEL CORREA, PEDRO GAJARDO
AUXILIARES: GONZALO SÁNCHEZ, RODOLFO GAINZA

1. Estudiar la convergencia puntual, la convergencia uniforme y la convergencia para la norma $\|\cdot\|_1$, de las siguientes sucesiones de funciones en $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ para f_k definidas de a) a e) y en $\mathcal{C}([0,2],\mathbb{R})$ para f_k definida en f).

   a) $f_k(x) = \frac{\sin(kx)}{k}$

   b) $f_k(x) = xe^{-kx}$

   c) $f_k(x) = \begin{cases} kx & \text{si } x \in [0, 1/k] \\ (kx)^{-1} & \text{si } x \in [1/k, 1] \end{cases}$

   d) $f_k(x) = kxe^{-kx}$

   e) $f_k(x) = \frac{kx^2}{1+kx}$

   f) $f_k(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [0, 1-1/k] \\ kx-k & \text{si } x \in [1-1/k, 1+1/k] \\ 1 & \text{si } x \in [1+1/k, 2] \end{cases}$

2. Demuestre que si $\{f_k\}$ es una sucesión en $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ uniformemente convergente a una función f, entonces
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_k \int_a^b f_k(x)dx.$$

3. Sean $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ dos sucesiones de funciones en $\mathcal{A}(A,\mathbb{R})$ uniformemente convergentes a f y g respectivamente. Demuestre que la sucesión $\{h_n\}$ definida por $h_n := f_n \cdot g_n$ es uniformemente convergente a la función $h = f \cdot g$.

4. Sea $\vec{F}$ un e.v.n., $\{f_n\}$ una sucesión en $\mathcal{A}(A,\vec{F})$ uniformemente convergente a una función f y $\{g_n\}$ una sucesión de funciones de A en $\vec{F}$ que verifica $\|f_n - g_n\|_\infty \to 0$. Demuestre que la sucesión $\{g_n\}$ está en $\mathcal{A}(A,\vec{F})$ y converge uniformemente a la función f.

5. Sea $\{p_n\}$ una sucesión de polinomios de una variable real definidos por la formula recurrente
$$p_1 = 0,\ p_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(x + 2p_n(x) - p_n(x)^2).$$
Demuestre que para todo $x \in [0,1]$ se tiene
$$0 \le \sqrt{x} - p_n(x) \le \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}$$

y que la sucesión $\{p_n\}$ en $\mathcal{A}([0,1],\mathbb{R})$ converge uniformemente a la función f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.