Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas U. de Chile

Ejercicios capitulo 4

PROFESORES: RAFAEL CORREA, PEDRO GAJARDO
AUXILIARES: GONZALO SÁNCHEZ, RODOLFO GAINZA

1. Demueste que la norma en un espacio de Hilbert verifica la igualdad
$$\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2) \quad \text{para todo} \quad \vec{x}, \vec{y}.$$

2. Demuestre que si $\vec{E}$ es un e.v.n. cuya norma verifica la igualdad del Ejercicio 1, entonces la función $b : E \times E \to E$ definida por
$$b(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4}(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2)$$
es un producto interno. Demuestre entonces que $\vec{E}$ es un espacio de Hilbert.

3. Dado un punto $\vec{b}$ en un espacio de Hilbert $\vec{E}$, demuestre que $\|\langle \vec{b}, \cdot \rangle\| = \|\vec{b}\|$ (la primera norma es la de $\mathcal{L}(\vec{E}, \mathbb{R})$ y la segunda la de $\vec{E}$).

4. Demuestre que la proyección en un espacio de Hilbert $\vec{E}$, de un punto $\vec{a}$, sobre la bola cerrada $B(\vec{c}, 1)$ (suponiendo que $\vec{a} \notin B(\vec{c}, 1)$), está dada por $\vec{p}(\vec{a}) = \vec{c} + \frac{\vec{a}-\vec{c}}{\|\vec{a}-\vec{c}\|}$.

5. Calcule en $\mathbb{R}^3$, dotado de la norma $\| \cdot \|_2$, la proyección del punto (1,2,3) sobre el plano de ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Calcule la proyección del mismo punto sobre el plano afín de ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas U. de Chile

Anexo capitulo 4 del apunte del curso MA22A año 2005

Profesores: Rafael Correa, Pedro gajardo

auxiliares: Gonzalo Sánchez, Rodolfo Gainza

P1 Sean $\vec{x}, \vec{y}$

$$\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 =< \vec{x}-\vec{y}, \vec{x}-\vec{y} > + < \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y} >$$

Por linealidad del producto interno se tiene:

$$=< \vec{x}, \vec{x} > + < \vec{x}, -\vec{y} > + < -\vec{y}, \vec{x} > + < -\vec{y}, -\vec{y} > + < \vec{x}, \vec{x} > + < \vec{x}, \vec{y} > + < \vec{y}, \vec{x} > + < \vec{y}, \vec{y} >$$

$$=< \vec{x}, \vec{x} > - < \vec{x}, \vec{y} > - < \vec{y}, \vec{x} > + < \vec{y}, \vec{y} > + < \vec{x}, \vec{x} > + < \vec{x}, \vec{y} > + < \vec{y}, \vec{x} > + < \vec{y}, \vec{y} >$$

Y por la simetría:

$$=< \vec{x}, \vec{x} > - < \vec{x}, \vec{y} > - < \vec{x}, \vec{y} > + < \vec{y}, \vec{y} > + < \vec{x}, \vec{x} > + < \vec{x}, \vec{y} > + < \vec{x}, \vec{y} > + < \vec{y}, \vec{y} >$$

Luego, agrupando términos:

$$= 2 < \vec{x}, \vec{x} > +2 < \vec{y}, \vec{y} >= 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$$

P2 Notemos que la simetría es directa. Por otro lado:

$$b(\vec{x}, \vec{z}) + b(\vec{y}, \vec{z}) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{z}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{z}\|^2 + \|\vec{y}+\vec{z}\|^2 - \|\vec{y}-\vec{z}\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{z}\|^2 + \|\vec{y}+\vec{z}\|^2 - \left(\|\vec{x}-\vec{z}\|^2 + \|\vec{y}-\vec{z}\|^2\right)\right)$$

$$= \left\|\frac{\vec{x}+\vec{z}}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{\vec{y}+\vec{z}}{2}\right\|^2 - \left(\left\|\frac{\vec{x}-\vec{z}}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{\vec{y}-\vec{z}}{2}\right\|^2\right)$$

usando $\vec{u} = \frac{\vec{x}+\vec{z}}{2}$ $\vec{v} = \frac{\vec{y}+\vec{z}}{2}$ en la fórmula:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right)$$

y analogamente $\vec{a} = \frac{\vec{x}-\vec{z}}{2}$ $\vec{b} = \frac{\vec{y}-\vec{z}}{2}$ en la fórmula:

$$\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|^2 + \left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|^2 = 2\left(\|\vec{a}\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2\right)$$

Tenemos :

$$b(\vec{x},\vec{z})+b(\vec{y},\vec{z})=\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{\vec{x}+\vec{y}}{2}+\vec{z}\right\|^2+\left\|\frac{\vec{x}-\vec{y}}{2}\right\|^2-\left(\left\|\frac{\vec{x}+\vec{y}}{2}-\vec{z}\right\|^2+\left\|\frac{\vec{x}-\vec{y}}{2}\right\|^2\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{\vec{x}+\vec{y}}{2}+\vec{z}\right\|^2-\left\|\frac{\vec{x}+\vec{y}}{2}-\vec{z}\right\|^2\right)=2\ b(\frac{\vec{x}+\vec{y}}{2},\vec{z})$$

$$b(\vec{x},\vec{z})+b(\vec{y},\vec{z})=2\ b(\frac{\vec{x}+\vec{y}}{2},\vec{z}) \tag{1}$$

Con esto último, tomando $\vec{y}=\vec{0}$, y como $b(\vec{0},\vec{z})=0$ tenemos:

$$b(\vec{x},\vec{z})+b(\vec{0},\vec{z})=2\ b(\frac{\vec{x}+\vec{0}}{2},\vec{z})$$

$$b(\vec{x},\vec{z})=2\ b(\frac{\vec{x}}{2},\vec{z}) \tag{2}$$

Con (1) y (2) se tiene la linealidad del funcional $b(\cdot,\cdot)$

Además, inductivamente de (2) se demuestra que:

$$b(\vec{x},\vec{z})=2^n\ b(\frac{\vec{x}}{2^n},\vec{z})\quad \forall\ n\in\mathsf{N} \tag{3}$$

De la linealidad es directo probar que:

$$b(m\ \vec{x},\vec{z})=m\ b(\vec{x},\vec{z})\quad \forall\ m\in\mathsf{Z} \tag{4}$$

De (3) y (4) tenemos, $\forall\ n\in\mathsf{N}$ y $\forall\ m\in\mathsf{Z}$, con $\alpha=\frac{m}{2^n}$

$$b(\alpha\ \vec{x},\vec{z})=\alpha\ b(\vec{x},\vec{z}) \tag{5}$$

Ahora bien, como en un espacio vectorial normado, $\|\alpha\vec{x}+\vec{y}\|$ y $\|\alpha\vec{x}-\vec{y}\|$ son continuas en α, $b(\alpha\vec{x},\vec{y})$ es continua en α. Finalmente como los números de la forma $\frac{m}{2^n}\quad n\in\mathsf{N}\ m\in\mathsf{Z}$ (números diádicos) son densos en R, de (5) y de la continuidad recién mostrada, se deduce que:

$$b(\alpha\ \vec{x},\vec{z})=\alpha\ b(\vec{x},\vec{z})\quad \forall\ \alpha\in\mathsf{R}$$

P3 Sea $\vec{b}\in\vec{E}$. Por una parte tenemos:

$$\left\|<\vec{b},\cdot>\right\|=\sup_{\vec{x}\in\vec{E}}\frac{\left|<\vec{b},\vec{x}>\right|}{\|\vec{x}\|}\geq\frac{\left|<\vec{b},\vec{b}>\right|}{\left\|\vec{b}\right\|}=\frac{\left\|\vec{b}\right\|^2}{\left\|\vec{b}\right\|}=\left\|\vec{b}\right\|$$

Por otra parte, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left\|<\vec{b},\cdot>\right\|=\sup_{\vec{x}\in\vec{E}}\frac{\left|<\vec{b},\vec{x}>\right|}{\|\vec{x}\|}\leq\sup_{\vec{x}\in\vec{E}}\frac{\left\|\vec{b}\right\|\,\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}=\left\|\vec{b}\right\|$$

P4 Sea $\vec{a} \in \vec{E}$ y que no pertenece a $\mathcal{B}(\vec{c},1)$ mostremos que la proyección de a sobre esta bola, está dada por $\vec{p}(\vec{a}) = \vec{c} + \frac{\vec{a}-\vec{c}}{\|\vec{a}-\vec{c}\|}$.

$$d(\vec{p}(\vec{a}),\vec{a}) = \|\vec{p}(\vec{a}) - \vec{a}\| = \left\| \vec{c} + \frac{\vec{a}-\vec{c}}{\|\vec{a}-\vec{c}\|} - \vec{a} \right\| = \left\| (\vec{c}-\vec{a})(1 - \frac{1}{\|\vec{a}-\vec{c}\|}) \right\| = \|\vec{a}-\vec{c}\| \, (1 - \frac{1}{\|\vec{a}-\vec{c}\|})$$

Luego

$$d(\vec{p}(\vec{a}),\vec{a}) = \|\vec{a}-\vec{c}\| - 1$$

Por otro lado, $\vec{p}(\vec{a}) \in \mathcal{B}(\vec{c},1)$ pues:

$$d(\vec{p}(\vec{a}),\vec{c}) = \|\vec{p}(\vec{a}) - \vec{c}\| = \left\| \vec{c} + \frac{\vec{a}-\vec{c}}{\|\vec{a}-\vec{c}\|} - \vec{c} \right\| = \frac{\|\vec{a}-\vec{c}\|}{\|\vec{a}-\vec{c}\|} = 1$$

Sea ahora $\vec{x} \in \mathcal{B}(\vec{c},1)$

$$d(\vec{a},\vec{x}) = \|\vec{a}-\vec{x}\| = \|(\vec{a}-\vec{c}) - (\vec{x}-\vec{c})\| \geq \|\vec{a}-\vec{c}\| - \|\vec{x}-\vec{c}\| \geq \|\vec{a}-\vec{c}\| - 1 = d(\vec{a},\vec{p}(\vec{a}))$$

Por lo que concluimos que $\vec{p}(\vec{a})$ es la proyección de $\vec{a}$ sobre $\mathcal{B}(\vec{c},1)$.

P5 El plano $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ corresponde al engendrado por los vectores $(-1,1,0)^T$ y $(-1,0,1)^T$ y que pasa por $(0,0,0)^T$. El vector normal de dicho plano es el $(1,1,1)^T$. Luego, basta aplicar la fórmula aprendida en algebra lineal, para la proyección de un punto sobre un plano, que biene dada por:

$$\vec{p}(\vec{a}) = \vec{a} + \frac{< \vec{p} - \vec{a}, \vec{n} > \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}$$

Donde $\vec{n}$ es el vector normal al plano, $\vec{p}$ es un punto cualquiera del plano, y $\vec{a}$ es el punto proyectado. Con esto, el resultado es: $(-1,0,1)$.

Para el plano afin el resultado será, $(0,1,2)$.

P6 Sea $\vec{E}$ e.v.n. y sea $\vec{F} \subset \vec{E}$ subespacio cerrado de dimensión finita. Sea $p : \vec{E} \longrightarrow \vec{F}$ la proyección, que sabemos es una aplicación lineal y continua. Mostremos que ella es abierta. Sea $A \subseteq \vec{E}$ abierto. Mostraremos que $p(A) \subseteq \vec{F}$ es abierto.

Sea $\vec{w} \in p(A)$, luego, $\exists\ \vec{x} \in A$ tal que $p(\vec{x}) = \vec{w}$.

Como A es abierto, $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}(\vec{x},\varepsilon) \subset A$.

Sea $\vec{z} \in \mathcal{B}(\vec{w},\varepsilon)$. Denotemos $\vec{y} = \vec{x} + \vec{z} - \vec{w}$. Claramente $\vec{y} \in \vec{E}$. Además:

$$\|\vec{x}-\vec{y}\| = \|\vec{x}-\vec{x}-\vec{z}+\vec{w}\| = \|\vec{z}-\vec{w}\| < \varepsilon$$

Por lo que $\vec{y} \in \mathcal{B}(\vec{x},\varepsilon) \subset A$.

Por último, aplicando $p(\cdot)$ a $\vec{y}$, ocupando la linealidad, y que $p(\vec{x}) = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \vec{F}$.

$$p(\vec{y}) = p(\vec{x}) + p(\vec{z}) - p(\vec{w}) = \vec{w} + \vec{z} - \vec{w} = \vec{z}$$

Con lo que $\vec{z} \in p(A) \ \Rightarrow\ \mathcal{B}(\vec{w},\varepsilon) \in p(A) \ \Rightarrow\ p(A)$ es abierto.