Guía 1
MA 22A Cálculo en Varias Variables

Profesor: Patricio Felmer

1. Sea f definida por la siguiente fórmula:

$$f(x_1,x_2) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - x_2}} \text{ si } (x_1,x_2) \neq 0 \text{ y } f(0,0) = 0$$

   (a) Encuentre el conjunto donde se puede definir f, es decir $Dom f$, grafique.
   (b) Determine las curvas de nivel de f.
   (c) Determine si f es continua en $(0,0)$.

2. Encuentre los conjuntos de nivel para las siguientes funciones (para los niveles que se indican).
   (a) $f(x,y) = x + y$ para $f(x,y) = 1$.
   (b) $f(x,y) = (x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2$ para $f(x,y) = 0$.
   (c) $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1x_2x_3, x_1 + x_2)$ para $f(x_1,x_2,x_3) = (0,1)$.

3. Determine si las siguientes funciones admiten límite en los puntos que se indican:
   (a) $f(x,y) = 2xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ en $\vec{x}_0 = (0,0)$.
   (b) $f(x,y) = \frac{senx - seny}{x-y}$ en $\vec{x}_0 = (0,0)$.
   (c) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ en $\vec{x}_0 = (0,0)$.

4. Sean $f,g,h : I\!R^2 \to I\!R$ tres funciones continuas. Se define la función $F : I\!R^2 \to I\!R$ por

$$F(x,y) = h(f(x,y), g(x,y)).$$

   Demuestre que F es continua.

5. Estudie la continuidad de las siguientes funciones.
   (a) $f(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{x_1}{x_1+x_2} & \text{si } x_1 + x_2 \neq 0 \\ 1 & \text{si } x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$
   (b) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 \ell n(x_1^3 x_2 + x_3) + sen(x_3^2 + x_1)$.

6. Sea $L : I\!R^n \to I\!R^m$ una función lineal
   (a) Demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes:
      (1) L es continua para todo punto de $I\!R^n$
      (2) L es continua en 0.

(3) $\|L(x)\|$ es acotada si $x \in \bar{B}(0,1)$, la bola unitaria.

(b) Demuestre que toda función lineal de $I\!R^n$ en $I\!R^m$ es continua.

7. Sean $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ tales que $x_1 - x_0, ..., x_{n-1} - x_0$ son linealmente independientes. Probar que existe exactamente un hiperplano conteniendo a $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$.

8. i) Demuestre que si $\vec{x}$ es un vector cualquiera de $I\!R^n$ y si $\vec{d}$ es un vector unitario, entonces $\vec{x} = y + z$, donde y es un múltiplo de $\vec{d}$ y z es perpendicular a $\vec{d}$.
ii) Demuestre que los vectores y y z de la parte i) están determinados unívocamente.