Guía 2
MA 22A Cálculo en Varias Variables

Profesor: Patricio Felmer Auxiliar: Alejandro Drexler

1. Encontrar todas las derivadas parciales para

$$\begin{array}{l} f(x,y) = (e^x cosy, e^x seny) \\ f(x,y) = log_x y \end{array}.$$

2. Sea $f : I\!R^2 \to I\!R$ continua y diferenciable. Sea $G_f = \{(\vec{x}, f(\vec{x}))/\vec{x} \in Domf\}$ el gráfico de f. Sea $F : I\!R^3 \to I\!R$ tal que $F(x,y,z) = z - f(x,y)$
   (a) Muestre que G_f corresponde a un conjunto de nivel de F.
   (b) Demuestre que $\nabla F = (-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1)$.
   (c) Encuentre el vector normal y el plano tangente a G_f cuando $f(x,y) = xy + ye^x$ en el punto $(1,1)$.

3. Sea $f(u,v) = (u\text{cos}v, u\text{sen}v)$, con $-\pi/2 < v < \pi/2$ y
   $g(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, artan(y/x))$ para $x > 0$.
   (i) Encontrar $D(g \circ f)(u,v)$ y $D(f \circ g)(x,y)$.
   (ii) Determinar si $Domf = Dom(g \circ f)$, y si $Domg = Dom(g \circ f)$.

4. Sea $S = \{x \in I\!R^2 / \|x\| = 1\}$. Sea $g : S \to I\!R$ una función continua tal que

$$g(1,0) = g(0,1) = 0 \text{ y } g(-x) = -g(x), \forall x \in I\!R^2.$$

   Sea $f : I\!R^2 \to I\!R$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \|x\| g(\frac{x}{\|x\|}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   (a) Dado $a \in I\!R^2$ demuestre que la función $h(t) = f(at), t \in I\!R$ es diferenciable.
   (b) Es f diferenciable en $(0,0)$?.

5. Encontrar el gradiente ∇f en cada uno de los siguientes casos.
   (a) $f(x,y) = x^2 - y^2\text{sen}y$ en (a,b).
   (b) $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^\alpha, \vec{x} \in I\!R^n, \alpha \in I\!R$.

6. a) Si $g(x,y) = e^{x+y}, f'(0) = (1,2)$, encontrar $F'(0)$ donde $F(t) = g(f(t))$ $(f : I\!R \to I\!R^2)$ y $f(0) = (1,-1)$.

b) Si $f(x,y,z) = senx, F(t) = (cost, sent, t)$, encontrar $g'(\pi)$ donde $g(t) = f(F(t))$.

7. Sea $\phi : I\!R^2 \to I\!R^2$ una función de clase $C^1(I\!R^2, I\!R^2)$, tal que sus componentes ϕ_1, y ϕ_2 verifican

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial y}$$

Sea $h : I\!R^2 \to I\!R$ una función de clase $C^1(I\!R^2, I\!R)$. Se define la función $f : I\!R^2 \to I\!R$ por $f = h \circ \phi$. Demuestre que

$$\langle \nabla f(x,y), \nabla \phi_1(x,y) \rangle = [\frac{\partial h}{\partial x_1}(\phi(x,y))] \cdot \|\nabla \phi_1(x,y)\|^2$$

8. Sea $f : I\!R^2 \to I\!R$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) sen \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Calcular $\nabla f(0,0)$
(b) Probar que f es diferenciable en $(0,0)$.
(c) Probar que $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ no son continuas en $(0,0)$.