Guía 3
MA 22A Cálculo en Varias Variables

Profesor: Patricio Felmer   Auxiliar: Alejandro Drexler.

1. Encontrar la derivada direccional para las siguientes funciones en la dirección $\vec{u}$ que se indica y en el punto $\vec{a}$ dado:
   (a) $f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$, $\quad \vec{v} = (cos\alpha sen\beta, sen\alpha sen\beta, cos\beta)$.
   $\vec{a} = (1,0,0)$
   (b) $f(x,y) = e^x seny$, $\quad \vec{u} = (cos\alpha, sen\alpha)$
   $\vec{a} = (1,0)$
   (c) $f(x,y,mz) = x^2 + ye^z$, $\quad \vec{a} = (1,1,0)$,
   $\vec{u} =$ dirección (unitaria) determinada por la recta tangente a la curva $g(t) = (3t^2 + t + 1, 2^t, t^2)$ en $g(0)$.

2. (i) Hallar la ecuación para el plano tangente a cada superficie $z = f(x,y)$ en el punto indicado
   (a) $z = x^3 + y^3 - 6xy, (1,2,-3)$.
   (b) $z = (cosx)(seny), (0, \pi/2, 1)$
   (ii) Calcular para los siguientes casos la dirección de mayor crecimiento en $(1,1,1)$.
   (a) $f(x,y,z) = xy + yz + xz$
   (b) $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$

3. Sean f y g funciones de $I\!R^3 \to I\!R$. Suponer que f es diferenciable y $\nabla f(x) = g(x) \cdot x$. Mostrar que f es constante para las esferas centradas en el origen.

4. Una función $u = f(x,y)$ con segundas derivadas parciales continuas que satisfaga la ecuación de Laplace
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
se llama función armónica. Determinar cuales de las siguientes funciones son armónicas.
   (a) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$
   (b) $u(x,y) = senxcoshy$
   (c) $u(x,y) = e^x seny$.

5. Sea $f : I\!R^2 \to I\!R$. Para cada x defina $g_x : I\!R \to I\!R, g_x(y) = f(x,y)$. Suponga que para cada x existe un único y tal que $g_x'(y) = 0$. Si se denota por $c(x)$ tal y y se supone que es diferenciable demostrar:

(a) Si $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \neq 0 \forall (x,y)$ entonces:

$$c'(x) = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, c(x))}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, c(x))}.$$

(b) Si $c'(x) = 0$, entonces existe un $\bar{y}$ tal que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, \bar{y}) = 0 \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y}) = 0.$$