(Subir a U-Curso)

CURSO MA 22 CALCULO EN VARIAS VARIABLES.

Problema 1.-

a) Sean los conjuntos $B_n = \{(x,y) /\ y = \dfrac{1}{nx}\ ,\ x > 0, y \leq 1, n \in N\ \}$ y B = $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

Determinar el interior , la frontera, la adherencia y el conjunto derivado de cada uno de ellos. Fundamentar si son conjuntos abiertos, o cerrados, u otra opción.

b) Sea **|| . ||** la norma euclidiana y sea *d* la distancia inducida por esa norma, en el plano $\mathbf{R}^2$.

i) Demostrar que la función g definida por

$$g(p,q) = \begin{cases} \| p \| + \| q \| & si\ \ \| p \| \neq \| q \| \\ d(p,q) & si\ \ \| p \| = \| q \| \end{cases}$$

es una métrica en $\mathbf{R}^2$.

ii) Describir cómo es la bola abierta $B_\delta(p)$ en el espacio métrico { $\mathbf{R}^2$, g }

indicación : considerar los casos $||p|| \geq \delta$ y $||p|| < \delta$

Problema 2.-

Parte a) Demostrar que la función real f que se indica, definida en $R^2 - \{0,0\}$ mediante la expresión

$$f(x,y) = \frac{2x^2(y+1) + y^2}{2x^2 + y^2}$$ tiene límite 1 en el punto (0,0).

Parte b) La función $f : R^2 \to R$ está definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Demostrar que la función es continua en (0,0).
b) Calcular las derivadas parciales en (0,0) y determinar si son continuas en ese pun to.
c) Estudiar si existen derivadas direccionales en cualquier dirección en (0,0)
d) Determinar si la función es diferenciable en (0,0)

Problema 3.-

a) Calcular las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ de la función z = $f(x,y)=\frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) Sea $f:R^2 \to R$ la función definida por las expresiones

$$\begin{cases} f(x,y)=x^2 arctg\,\frac{y}{x}-y^2 arctg\,\frac{x}{y} & si \quad xy\neq 0 \\ f(x,0)=0 \qquad y \qquad f(0,y)=0 \end{cases}$$

Calcular las derivadas D_{12} f(x,y) , D_{21} f(x,y) , D_{12} f(0,0) y D_{21} f(0,0) ,

****

Problema 4.-

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

a) Demostrar que la función es continua en (0,0).
b) Calcular las derivadas parciales en (0,0) y determinar si son continuas en ese pun to.
c) Estudiar si existen derivadas direccionales en cualquier dirección en (0,0)

Problema 5.-

Estudiar la continuidad en el origen de las siguientes funciones. En caso de que no lo sean ¿es posible reparar la discontinuidad ?

$$f(x,y,z)=\begin{cases} \frac{xyz}{z^2+x^2y^2} & (xy\neq 0)\vee(z\neq 0) \\ 0 & (xy=0)\wedge(z=0) \end{cases}$$

$$g(x,y)=\begin{cases} \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$