Control No.1 MA 22A

21 de Abril de 2004

Profesores: J. Dávila y P. Felmer

1. a) Sean A, B subconjuntos de $I\!R^n$. Pruebe que si A es abierto y $A \cap adh(B) \neq \phi$ entonces $A \cap B \neq \phi$.

   b) Considere el espacio de Banach $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ (el espacio de las funciones continuas en $[a,b]$ con la norma infinito). Pruebe que el conjunto
$$A = \{f \in C[a,b] \ / \ |f(x) - f(y)| \leq |x - y|, \forall x, y \in [a,b]\}$$
   es un conjunto cerrado. ¿Es A acotado? ¿Es A compacto?

   c) i) Sean $f : I\!R^4 \to I\!R^3$ y $g : I\!R^3 \to I\!R^4$ funciones diferenciables y sea $h = f \circ g$. Si
$$Df(g(0)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } Dg(0) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$
   encuentre $\frac{\partial h_2}{\partial x_3}(0)$.
   ii) En la siguientes afirmaciones indique Verdadero o Falso:
   1) $Z\!\!\!Z$ no es cerrado en $I\!R$.
   2) Si A y B son abiertos, $A \cup B$ no es necesariamente abierto.
   3) En $M_n(I\!R)$ todas las normas son equivalentes.

2. a) Pruebe usando la definición $\varepsilon - \delta$ que
$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3}{x+y} = \frac{1}{2}.$$
   b) Sea
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y)^2 y^2}{x^8} & \text{si } 0 < x, 0 < y < x^2, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$
   Determine si f es continua en $(0,0)$.

   c) Definimos
$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y)^2 y^2}{x^{7+\frac{1}{2}}} & \text{si } 0 < x, 0 < y < x^2, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$
   Sea $\gamma(t) = (t, \frac{1}{2}t^2)$. ¿ Es $g \circ \gamma(t)$ diferenciable en $t = 0$? A partir de la regla de la cadena, ¿ qué puede concluir sobre la diferenciabilidad de g en $(0,0)$?

3. a) Definamos
$$u = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2), \quad x > 0,$$
$$v = \arctan(y/x), \quad x > 0.$$
   Sea $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ donde $f = f(u,v)$ es diferenciable en $I\!R^2$. Pruebe que
$$(\frac{\partial g}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g}{\partial y})^2 = \frac{1}{x^2+y^2}\left((\frac{\partial f}{\partial u})^2 + (\frac{\partial f}{\partial v})^2\right).$$
   b) Sea S la superficie $S = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 = 1\}$.
   i) Encuentre los planos tangentes a S en $(0, 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y $(0,1,0)$.
   ii) Bosqueje la intersección de S con el plano $\{x = 0\}$ (es decir el plano $y - z$). En este bosquejo indique los puntos $(0, 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0,1,0)$ y dibuje los vectores normales a S en estos puntos.

Tiempo: 3 horas.