Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas U. de Chile

Ejercicios capitulo 1

Profesores: Rafael Correa, Pedro gajardo

auxiliares: Gonzalo Sánchez, Rodolfo Gainza

1.
   a) Dada una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$ y una matriz no singular P de $n \times n$ demuestre que la función $\|\vec{x}\|_P = \|P\vec{x}\|$ es también una norma en $\mathbb{R}^n$.

   b) Demuestre que en el e.v. $\mathbb{R}^2$, la función $\|\vec{x}\|_e = \left[\frac{x_1^2}{9} + 4x_2^2\right]^{1/2}$ es una norma. Haga un dibujo de los conjuntos $B(\vec{0}, 1)$ y $B'(\vec{0}, 1)$.

2. Demuestre que en el e.v. $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ de las funciones continuas de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$, la función $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$ es una norma. Demuestre que en el e.v. $I([a, b], \mathbb{R})$ de las funciones integrables de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$, la función $\|\cdot\|$, no es una norma.

3. Demuestre que en el e.v. $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ la función $\|f\|_2 = \left[\int_a^b f(t)^2 dt\right]^{1/2}$ es una norma.

4. Demuestre (usando el teorema fundamental del álgebra) que en el e.v. $\mathcal{P}$ de los polinomios de una variable real, las siguientes funciones son normas

$$\|p\| = \max_{x\in[0,1]} |p(x)|$$

$$\|p\|' = \max\{|\alpha_0|, |\alpha_1|, ..., |\alpha_n|\} \quad (\text{ donde } \quad p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i)$$

5. Demuestre que en el e.v. l_∞ de las sucesiones reales acotadas, la función $\|\{r_k\}\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |r_k|$ es una norma.

6. Demuestre que en el e.v. l_1 de las sucesiones reales que verifican "$\sum |r_k|$ convergente", la función $\|\{r_k\}\|_1 = \sum |r_k|$ es una norma.

7. Demuestre que en un e.v.n. todo conjunto formado por un solo elemento es cerrado.

8. Demuestre que en un e.v.n. los únicos conjuntos que son abiertos y cerrados al mismo tiempo, son el conjunto vacío y el espacio entero.

9. Determine el interior y la adherencia de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\{\vec{x} : x_2 > x_1\}, \{\vec{x} : 0 < \|\vec{x}\|_2 \leq 1\}$$

$$\{\vec{x} : x_1 = x_2 \text{ y } x_1 > 0\}, \{\vec{x} : x_1 \in \mathbb{Q}\}, \{(\frac{1}{k}, (-1)^k) : k \in \mathbb{N}\}$$

10. Dados dos conjuntos A, B en un e.v.n. $\vec{E}$, demuestre que

    a) $int(A \cap B) = intA \cap intB$.

    b) $int(A \cup B) \supset intA \cup intB$ (dé un ejemplo donde no hay igualdad).

    c) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

    d) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ (dé un ejemplo donde no hay igualdad)

    e) $\bar{A} = intA \cup \{\vec{x} \in \vec{E} : B(\vec{x}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ y $B(\vec{x}, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0\}$

    f) $A \subset B \;\Rightarrow\; intA \subset intB$ y $\bar{A} \subset \bar{B}$.

    g) $intA \cap B = \emptyset \Leftrightarrow intA \cap \bar{B} = \emptyset$

    h) $\bar{A} = \vec{E}$ y $intB \cap A = \emptyset \Rightarrow intB = \emptyset$

    i) $int(A^c) = (\bar{A})^c$

    j) $(\overline{A^c}) = (intA)^c$

11. Si definimos la "distancia" de un punto $\vec{x}$ de un e.v.n. $\vec{E}$ a un conjunto $A \subset \vec{E}$ como la cantidad
$$d_A(\vec{x}) = \text{ínf}\{\|\vec{x} - \vec{y}\| : \vec{y} \in A\}$$
demuestre que $\bar{A} = \{\vec{x} \in \vec{E} : d_A(\vec{x}) = 0\}$.

12. Si A es un conjunto en un e.v.n. $\vec{E}$ con la propiedad "$\bar{A} = \vec{E}$ y $intA = \phi$", entonces el conjunto A^c (complemento de A) tiene la misma propiedad.

13. En el e.v. $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ dotado de la norma $\|\cdot\|_1$ (ver Problema 2) demuestre que la sucesión $\{f_k\}$ definida por
$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -2^k(x - \frac{1}{2}) + 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^k}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{2^k}, 1] \end{cases}$$
es de Cauchy y no es convergente.

14. Demuestre que en el e.v. $\mathcal{A}([0,1], \mathbb{R})$ de las funciones acotadas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, dotado de la norma $\|\cdot\|_\infty$, la sucesión $\{f_k\}$ definida en el problema anterior no es convergente.

15. Demuestre que en el e.v.n. l_1, definido en el Problema 6, el conjunto
$P = \{\{x_k\} \;:\; x_k \geq 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\}$ tiene interior vacío.

16. Demuestre que en el e.v.n. l_1, definido en el Problema 6, la bola $B(\vec{0}, 1)$ no es compacta.

17. Demuestre que un subconjunto cerrado de un conjunto compacto, es también compacto.

18. Demuestre que la intersección de un conjunto compacto con un conjunto cerrado, es un conjunto compacto.

19. Si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos compactos en un e.v.n. tal que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$, entonces existe un número finito de conjuntos de la familia: $A_{i_1},\ A_{i_2}, ..., A_{i_n}$, con la propiedad $\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j} = \emptyset$.

20. Si A es un conjunto compacto en un e.v.n. y si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos abiertos tales que $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i \supset A$, entonces existe un número finito de conjuntos de la familia: $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_n}$, con la propiedad $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_{i_j} \supset A$.

21. Dado el conjunto $A = [0, 1[$ en $\mathbb{R}$, encuentre una familia de abiertos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ cuya unión contenga al conjunto A y tal que no exista un número finito de ellos cuya unión contenga a A.

22. Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia decreciente de conjuntos compactos (no vacíos) en un e.v.n., demuestre que $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i \neq \emptyset$.

23.
    a) De un ejemplo en $\mathbb{R}$ de una familia decreciente de conjuntos acotados (no vacíos) cuya intersección sea vacía.
    b) De un ejemplo en $\mathbb{R}$ de una familia decreciente de conjuntos cerrados (no vacíos) cuya intersección sea vacía.