Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas U. de Chile

Ejercicios capitulo 2

Profesores: Rafael Correa, Pedro gajardo

auxiliares: Gonzalo Sánchez, Rodolfo Gainza

1. Sea f una función continua definida en un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en un e.v.n $\vec{F}$. Demuestre que

   a) Si $B \subset \vec{F}$ es cerrado, entonces $f^{-1}[B] \subset \vec{E}$ también es cerrado.

   b) Si $B \subset \vec{F}$ es abierto, entonces $f^{-1}[B] \subset \vec{E}$ también es abierto.

   c) $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ para todo $A \subset \vec{E}$.

   d) $f^{-1}[intB] \subset int(f^{-1}[B])$ para todo $B \subset \vec{F}$.

   e) $\overline{f^{-1}[B]} \subset f^{-1}[\bar{B}]$ para todo $B \subset \vec{F}$.

2. Demuestre que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(\vec{x}) = \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}$ si $\vec{x} \neq \vec{0}$ y $f(\vec{0}) = 0$ es continua en todo punto de $\mathbb{R}^2$ salvo en $\vec{0}$.

3. Demuestre que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(\vec{x}) = \frac{x_1 x_2}{\|\vec{x}\|_2}$ si $\vec{x} \neq \vec{0}$ y $f(\vec{0}) = 0$, es continua.

4. Demuestre que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x}\|_2}(x_1^2, x_2^2)$ si $\vec{x} \neq \vec{0}$ y $f(\vec{0}) = \vec{0}$, es continua.

5. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(\vec{x}) = \frac{x_1 x_2}{\|\vec{x}\|_2^2}$. Demuestre que $\lim\limits_{x_1 \to 0}(\lim\limits_{x_2 \to 0} f(\vec{x})) = \lim\limits_{x_2 \to 0}(\lim\limits_{x_1 \to 0} f(\vec{x})) = 0$ y que $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{0}} f(\vec{x})$ no existe.

6. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(\vec{x}) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{\|\vec{x}\|_2^2}$. Demuestre que $\lim\limits_{x_2 \to 0}(\lim\limits_{x_1 \to 0} f(\vec{x})) = -1$, $\lim\limits_{x_1 \to 0}(\lim\limits_{x_2 \to 0} f(\vec{x})) = 1$ y, que $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{0}} f(\vec{x})$ no existe.

7. Sea f una función continua definida en un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en un e.v.n. $\vec{F}$. Demuestre que el conjunto $G(f) = \{(\vec{x}, \vec{y}) \in \vec{E} \times \vec{F} : \vec{y} = f(\vec{x})\}$ es cerrado en el e.v.n. $\vec{E} \times \vec{F}$.

8. Sean f, g dos funciones continuas definidas en un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en un e.v.n. $\vec{F}$ y, sea $A \subset \vec{E}$ tal que $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in A$. Demuestre que $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in \bar{A}$.

9. Sean $\vec{E}_1, ..., \vec{E}_n$ espacios vectoriales normados y sea p_i la función del e.v.n. $\vec{E} = \vec{E}_1 \times ... \times \vec{E}_n$ en $\vec{E}_i$, que a cada $\vec{x} \in \vec{E}$ le asocia su componente $\vec{x}_i \in \vec{E}_i$. Demuestre que esta función es continua.

10. Sea f una función continua definida en un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en $\mathbb{R}$. Demuestre que

    a) $S_\lambda = \{\vec{x} \in \vec{E} : f(\vec{x}) \leq \lambda\}$ es un conjunto cerrado para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

    b) $I_\lambda = \{\vec{x} \in \vec{E} : f(\vec{x}) = \lambda\}$ es un conjunto cerrado para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

    c) $A_\lambda = \{\vec{x} \in \vec{E} : f(\vec{x}) < \lambda\}$ es un conjunto abierto para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

11. Sea f una función continua y biyectiva, de un compacto A de un e.v.n. $\vec{E}$ en un conjunto B de un e.v.n. $\vec{F}$. Demuestre que la función $f^{-1} : B \to A$ es continua.

12. Sea f una función continua definida en $\mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}$. Si f verifica la propiedad: para todo $L \in \mathbb{R}_+$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\vec{x}\| \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad f(\vec{x}) \geq L$, demuestre que el conjunto S_λ definido en el Ejercicio 10 es un compacto y que la función f alcanza su mínimo en $\mathbb{R}^n$.

13. Dado un e.v.n. $\vec{E}$ y dos puntos $\vec{a}, \vec{b} \in \vec{E}$ demuestre que la función $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \in \vec{E}$ es continua. Con esto, demuestre que el intervalo $[\vec{a}, \vec{b}] = \{\vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \in \vec{E} : \lambda \in [0,1]\}$ es compacto.

14. Demuestre que la función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua pero no es Lipschitziana.

15. Demuestre que toda función Lipschitziana es uniformemente continua.

16. Sea f una función uniformemente continua en una parte A de un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en un e.v.n. $\vec{F}$. Demuestre que si $\{\vec{x}_k\}$ es una sucesión de Cauchy en A, entonces $\{f(\vec{x}_k)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\vec{F}$. Demuestre que esta propiedad no se tiene necesariamente si f no es uniformemente continua en A.

17. Sea l una función lineal definida en un e.v.n. $\vec{E}$ con valores en $\mathbb{R}$. Demostrar que l es continua si y solo si el conjunto $N(l) := \{\vec{x} \in \vec{E} : l(\vec{x}) = 0\}$ es cerrado en $\vec{E}$.

18. Sea l una función lineal definida en el e.v.n. $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ con valores en $\mathbb{R}$, por $l(f) = \int\limits_a^b f(x)dx$. Demuestre que l es continua.

19. Sea l una función lineal definida en el e.v.n. $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ con valores en $\mathbb{R}$, por $l(f) = \int\limits_a^b g(x)f(x)dx$, donde g es una función fija en $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Demuestre que l es continua.

20. Sea l una función lineal definida en el e.v.n. $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ con valores en $\mathbb{R}$, por $l(f) = f(0)$. Considere en $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ la sucesión $\{f_n\}$ definida por $f_n(x) = 1 - nx$ si $x \in [0, 1/n], f(x) = 0$ si $x \in [1/n, 1]$. Usando esta sucesión demuestre que l no es continua.

21. Usando el teorema del punto fijo de Banach demuestre que dado $\alpha > 0$, la sucesión $\{x_k\}$ construída por la fórmula recurrente $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{\alpha}{x_k}\right)$, a partir de un valor $x_1 \geq \sqrt{\alpha}$, converge a $\sqrt{\alpha}$.