Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas U. de Chile

Ejercicios capitulo 4

Profesores: Rafael Correa, Pedro gajardo
auxiliares: Gonzalo Sánchez, Rodolfo Gainza

1. Demueste que la norma en un espacio de Hilbert verifica la igualdad

$$\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2) \quad \text{para todo} \quad \vec{x}, \vec{y}.$$

2. Demuestre que si $\vec{E}$ es un e.v.n. cuya norma verifica la igualdad del Ejercicio 1, entonces la función $b : E \times E \to E$ definida por

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4}(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2)$$

es un producto interno. Demuestre entonces que $\vec{E}$ es un espacio de Hilbert.

3. Dado un punto $\vec{b}$ en un espacio de Hilbert $\vec{E}$, demuestre que $\|\langle\vec{b}, \cdot\rangle\| = \|\vec{b}\|$ (la primera norma es la de $\mathcal{L}(\vec{E}, \mathbb{R})$ y la segunda la de $\vec{E}$).

4. Demuestre que la proyección en un espacio de Hilbert $\vec{E}$, de un punto $\vec{a}$, sobre la bola cerrada $B(\vec{c}, 1)$ (suponiendo que $\vec{a} \notin B(\vec{c}, 1)$), está dada por $\vec{p}(\vec{a}) = \vec{c} + \frac{\vec{a}-\vec{c}}{\|\vec{a}-\vec{c}\|}$.

5. Calcule en $\mathbb{R}^3$, dotado de la norma $\|\cdot\|_2$, la proyección del punto (1,2,3) sobre el plano de ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Calcule la proyección del mismo punto sobre el plano afín de ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.