Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas U. de Chile 21 de septiembre de 2005

Anexo capitulo 5 del apunte del curso MA22A año 2005

PROFESORES: RAFAEL CORREA, PEDRO GAJARDO
AUXILIARES: GONZALO SÁNCHEZ, RODOLFO GAINZA

P1) i)

$$DI_g(f;d) \ = \ \lim_{t\to 0} \frac{\int\limits_0^1 g(x)\,(f(x)+td(x)) - \int\limits_0^1 g(x)f(x)}{t} \ = \ \int\limits_0^1 g(x)f(x) \ = \ I_g(f)$$

ii)

$$DP_k(f;d) \ = \ \lim_{t\to 0} \frac{(f+td)^k - f^k}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sum\limits_{i=o}^{k} \frac{k!}{i!(k-i!)} f^i t^{k-i} d^{k-i} \ - f^k}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{i!(k-i)!} f^i t^{k-i-1} d^{k-i} \ = \ \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{i!(k-i)!} f^i d^{k-i} \lim_{t\to 0} t^{k-i-1} \ = \ kf^{k-1}d$$

iii)

$$DEXP(f;d) \ = \ \lim_{t\to 0} \frac{e^{f+td} \ - \ e^f}{t} \ = \ \lim_{t\to 0} e^f \frac{e^{td} \ - \ 1}{t} \ = e^f \lim_{t\to 0} \frac{e^{td}-1}{t} \ = \ e^f d$$

esto se tiene pues: $\lim\limits_{\|h\|\to 0} \frac{\|e^h-1-h\|}{\|h\|} \ = \ 0$ en efecto la $\forall x \in (-1,1)$ se tiene que:
$0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{1-x}$ con esto se tiene que :

$$0 \leq e^{h(x)} - 1 - h(x) \leq \frac{h(x)^2}{1-h(x)}$$

si $\|h\| < 1$ entonces:

$$\left\|e^h - 1 - h\right\| \leq \frac{\|h\|^2}{\|1-h\|}$$

dividiendo por $\|h\| \to 0$ se obtiene el resultado pues :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|h\|}{\|1-h\|} \ = \ 0 \ y \ por \ lo \ tanto \ \lim_{t\to 0} \frac{e^{td}-1}{t} \ - d = \lim_{t\to 0} \frac{e^{td}-1-td}{t} \ = \ 0$$

iv)

$$DSEN(f;d) \ = \ \lim_{t\to 0} \frac{SEN(f+td) \ - \ SEN(f)}{t}$$

$$= \ \lim_{t\to 0} \frac{SEN(f)COS(td) + COS(f)SEN(td) - SEN(f)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} SEN(f)\left(\frac{COS(td)-1}{t}\right) + \lim_{t\to 0} COS(f)\frac{SEN(td)}{t} = COS(f)d$$

pues: $\lim_{t\to 0}\frac{COS(td)-1}{t} = 0$ y $\lim_{t\to 0}\frac{SEN(td)}{t} = d$ pero probaremos el resultado más general: $\lim_{h\to 0}\frac{\|COS(h)-1\|}{\|h\|} = 0$ y $\lim_{h\to 0}\frac{\|SEN(h)-h\|}{\|h\|} = 0$: Como el cos es una función diferenciable en $\mathbb{R}$ se tiene que para x cercano a $0 : \cos(x)-1 = o(x)$.

Por lo tanto si $\|h\|$ es lo suficientemente cercana a 0 se tendra: $\cos(h(x))-1 = o(h(x))$ tomando norma en esta igualdad y ya que $\|o(h)\| = o(\|h\|)$ obtenemos que :

$$\|COS(h) - 1\| = o(\|h\|) \text{ y por lo tanto } \lim_{h\to 0}\frac{\|COS(h)-1\|}{\|h\|} = 0$$

Analogamente, usando tailor de orden 2 entorno a 0, se tendrá : $\|SEN(h)-h\| = o(h)$ y por lo tanto:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|SEN(h)-h\|}{\|h\|} = 0$$

finalmente para obtener los limites deseados basta remplazar h por td y usar que $\|td\| = |t|\,\|d\|$.

v)

$$DCOS(f;d) = \lim_{t\to 0}\frac{COS(f+td)-COS(f)}{t}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{COS(f)COS(td)-SEN(f)SEN(td)-COS(f)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} COS(f)\frac{COS(td)-1}{t} + \lim_{t\to 0} -SEN(f)\frac{SEN(td)}{t} = -SEN(f)d$$

NOTAS: en este problema se ha usado que si $f_n \to F$ y $h_n \to H$ en E entonces $\lim_{n\to\infty} f_n h_n = FH$ y que: $\|fg\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

P2) i) Como I_g es lineal continua se tiene que $\forall\, f \in E\ DI_g(f) = I_g$.

ii)

$$\left\|P_k(f+h)-P_k(f)-kf^{k-1}h\right\| = \left\|\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}f^i h^{k-i} - f^k - kf^{k-1}h\right\|$$

$$= \left\|\sum_{i=0}^{k-2}\frac{k!}{i!(k-i)!}f^i h^{k-i}\right\| \le \sum_{i=0}^{k-2}\|f\|^i\|h\|^{k-i} = \left(\sum_{i=0}^{k-2}\|f\|^i\|h\|^{k-i-2}\right)\|h\|^2$$

$$\le cte(f,k)\,\|h\|^2 = o(\|h\|)$$

iii)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|EXP(f+h)-EXP(f)-EXP(f)h\|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0}\frac{\left\|e^f\left(e^h-1-h\right)\right\|}{\|h\|} \le \lim_{h\to 0}\left\|e^f\right\|\frac{\left\|e^h-1-h\right\|}{\|h\|}$$

$$= \left\|e^h\right\|\lim_{h\to 0}\frac{\left\|e^h-1-h\right\|}{\|h\|} = 0$$

iv)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|SEN(f+h) - SEN(f) - COS(f)h\|}{\|h\|}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\|SEN(f)COS(h) + SEN(h)COS(f) - SEN(f) - COS(f)h\|}{\|h\|}$$

$$\leq \lim_{h\to 0} \frac{\|SEN(f)\,(COS(h)-1)\|}{\|h\|} + \lim_{h\to 0} \frac{\|COS(f)\,(SEN(h)-h)\|}{\|h\|}$$

$$\leq \|SEN(f)\| \lim_{h\to 0} \frac{\|COS(h)-1\|}{\|h\|} + \|COS(f)\| \lim_{h\to 0} \frac{\|SEN(h)-h\|}{\|h\|} = 0$$

v)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|COS(f+h) - COS(f) + SEN(f)h\|}{\|h\|}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\|COS(f)COS(h) - SEN(f)SEN(h) - COS(f) + SEN(f)h\|}{\|h\|}$$

$$\leq \lim_{h\to 0} \frac{\|COS(f)\,(COS(h)-1)\|}{\|h\|} + \lim_{h\to 0} \frac{\|SEN(f)\,(h-SEN(h))\|}{\|h\|}$$

$$\leq \|COS(f)\| \lim_{h\to 0} \frac{\|COS(h)-1\|}{\|h\|} + \|SEN(f)\| \lim_{h\to 0} \frac{\|h-SEN(h)\|}{\|h\|} = 0$$

P3 La existencia se asegura por el problema 2 por lo que solo se debe utilizar la regla de la cadena.

i) $D[I_g \; o \; P_k](f)(h) = [(DI_g(P_k(f)) \; o \; DP_k(f))](h) = \int_0^1 g(x)kf^{k-1}(x)h(x)dx$

ii) $D[I_g \; o \; SEN \; o \; EXP](f)(h) = [DI_g(SEN(EXP(f))) \; o \; DSEN(EXP(f)) \; o \; DEXP(f)](h)$
$= \int_0^1 g(x)COS(e^{f(x)})e^{f(x)}h(x)dx$

iii) $D[EXP \; o \; COS \; o \; P_k](f)(h) = [DEXP(COS(P_k(f))) \; o \; DCOS(P_k(f)) \; o \; DP_k(f)](h)$
$= -kEXP(COS(f^k))SEN(f^k)f^{k-1}h$

iv) $D[COS \; o \; SEN](f)(h) = [DCOS(SEN(f)) \; o \; DSEN(f)](h) = -SEN(SEN(f))COS(f)h$

v) $D[I_g \; o \; SEN \; o \; P_k \; o \; EXP](f)(h)$
$= [DI_g(SEN(P_k(EXP(f)))) \; o \; DSEN(P_k(EXP(f))) \; o \; DP_k(EXP(f)) \; o \; DEXP(f)](h)$
$= \int_0^1 g(x)COS(e^{kf(x)})ke^{(k-1)f(x)}e^{f(x)}h(x)dx$

P4 Como $x^2+y^2+\frac{z^2}{2}=1$ entonces se tendra con en cambio de variables que:
$1 = r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi) + r^2\cos^2(\theta)\cos^2(\varphi) + \frac{r^2\sin^2(\varphi)}{2} = r^2\cos^2(\varphi) + \frac{r^2\sin^2(\varphi)}{2}$
Se tiene entonces que $r^2 = \frac{2}{2cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}$ asi derivando implicitamente en una variable:
$2r\partial_\theta r = \frac{4\cos(\theta)\sin(\theta)}{(\cos^2(\theta)+1)^2} = r^2\cos(\theta)\sin(\theta)$
lo que implica que: $\partial_\theta r = r\frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{2} = \frac{r}{4}\sin(2\theta)$

P5 i) Tenemos $f_1(r,\theta) = (x,y) = r\cos(\theta)$ y $f_2(r,\theta) = r\sin(\theta)$ y :

$$Jf(r,\theta) = \begin{pmatrix} \partial_r f_1 & \partial_\theta f_1 \\ \partial_r f_2 & \partial_\theta f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Para que sea invertible su determinante debe ser no nulo y esto es :

$$\left| \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \right| = r(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = r \neq 0$$

ii) Para calcular el diferencial de la inversa es necesario usar el teorema de la función inversa que asegura que:
$Df^{-1}(y) = Df(x)^{-1}$ donde $y = f(x)$.

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(\arctan(\frac{y}{x}))) & \sin(\theta(\arctan(\frac{y}{x}))) \\ -\sin(\theta(\arctan(\frac{y}{x}))) & \cos(\theta(\arctan(\frac{y}{x}))) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

P6 Primero notemos que :
$\partial_r x = \cos(\theta)\sin(\varphi)$; $\partial_r y = \cos(\theta)\sin(\varphi)$; $\partial_r z = \sin(\theta)$
$r^2(\partial_r x)^2 = x^2$; $r^2(\partial_r y)(\partial_r x) = xy$; $r^2(\partial_r x)(\partial_r z) = xz$
$r^2(\partial_r y)^2 = y^2$; $r^2(\partial_r y)(\partial_r x) = xy$; $r^2(\partial_r y)(\partial_r z) = yz$
$r^2(\partial_r z)^2 = z^2$; $r^2(\partial_r y)(\partial_r z) = zy$; $r^2(\partial_r x)(\partial_r z) = xz$
$\partial_\theta x = -r\sin(\theta)\sin(\varphi)$; $\partial_\theta y = -r\sin(\theta)\cos(\theta)$; $\partial_\theta z = r\cos(\theta)$
$\partial^2_{\theta\theta} x = -x$; $\partial^2_{\theta\theta} y = -y$; $\partial^2_{\theta\theta} z = -z$; $(\partial_\theta x)^2 = y^2$; $(\partial_\theta y)^2 = x^2$; $(\partial_\theta z)^2 = x^2 + y^2$
$\partial_\varphi x = r\cos(\theta)\cos(\varphi)$; $\partial_\varphi y = -r\cos(\theta)\sin(\varphi)$; $\partial_\varphi z = 0$; $\partial^2_{\varphi\varphi} x = -x$;
$\partial^2_{\varphi\varphi} y = -y$; $(\partial_\varphi x)(\partial_\varphi y) = -xy$; $(\partial_\varphi x)^2 = y^2$; $(\partial_\varphi y)^2 == x^2$
Con estas identificaciones se puede proceder a derivar la función f:
$\partial_r f = \partial_x f \partial_r x + \partial_y f \partial_r y + \partial_z f \partial_r z$ y procedemos a calcular $\partial_r(r^2 \partial_x f \partial_r x)$ (las demas son analogas):
$\partial_r(r^2\partial_x f\partial_r x) = 2r\partial_x f\partial_r x + r^2\partial_r(\partial_x f)\partial_r x + \{r^2\partial^2_{rr}x\partial_x f = 0\}$
$\partial_r(r^2\partial_x f\partial_r x) = 2r\partial_x f\partial_r x + r^2\left\{\partial^2_{xx}f(\partial_r x)^2 + \partial^2_{xy}f(\partial_r x)(\partial_r y) + \partial^2_{zx}f(\partial_r x)(\partial_r z)\right\}$
$\partial_r(r^2\partial_x f\partial_r x) = x\left\{2\partial_x f + x\partial^2_{xx}f + y\partial^2_{yx}f + z\partial^2_{zx}f\right\}$ y analogamente:
$\partial_r(r^2\partial_y f\partial_r y) = y\left\{2\partial_y f + y\partial^2_{yy}f + x\partial^2_{xy}f + z\partial^2_{zy}f\right\}$
$\partial_r(r^2\partial_z f\partial_r z) = z\left\{2\partial_z f + z\partial^2_{zz}f + y\partial^2_{yz}f + x\partial^2_{zx}f\right\}$ y sumando:
$\partial_r(r^2\partial_r f) = 2\{x\partial_x f + y\partial_y f + z\partial_z f\} + 2\left\{xy\partial^2_{xy}f + xz\partial^2_{xz}f + yz\partial^2_{yz}f\right\} + \left\{x^2\partial^2_{xx}f + y^2\partial^2_{yy}f + z^2\partial^2_{zz}f\right\}$
Ahora veamos las derivadas con respecto a θ:

$\frac{1}{\cos(\theta)}\partial_\theta(\cos(\theta)\partial_\theta f) = \frac{1}{\cos(\theta)}\left[\partial_\theta(\partial_x f\partial_\theta x + \partial_y f\partial_\theta y + \partial_z f\partial_\theta z)\right]$
$= \frac{1}{\cos(\theta)}\{-\sin(\theta)[\partial_x f\partial_\theta x + \partial_y f\partial_\theta y + \partial_z f\partial_\theta z] + \cos(\theta)[\partial^2_{\theta\theta}x\partial_x f + \partial^2_{\theta\theta}y\partial_y f + \partial^2_{\theta\theta}z\partial_z f]$
$+\cos(\theta)[\partial^2_{xx}f(\partial_\theta x)^2 + \partial^2_{yy}f(\partial_\theta y)^2 + \partial^2_{zz}f(\partial_\theta z)^2 + 2\partial^2_{xy}f\partial_\theta x\partial_\theta y + 2\partial^2_{xz}f\partial_\theta x\partial_\theta z + 2\partial^2_{yz}f\partial_\theta y\partial_\theta z]\}$
$= -\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}[\partial_x f\partial_\theta x + \partial_y f\partial_\theta y + \partial_z f\partial_\theta z] - [x\partial_x f + y\partial_y f + z\partial_z f]$
$+[\partial^2_{xx}f(\partial_\theta x)^2 + \partial^2_{yy}f(\partial_\theta y)^2 + \partial^2_{zz}f(\partial_\theta z)^2] + 2[\partial^2_{xy}f\partial_\theta x\partial_\theta y + \partial^2_{xz}f\partial_\theta x\partial_\theta z + \partial^2_{yz}f\partial_\theta y\partial_\theta z]$

$\frac{1}{\cos^2(\theta)}\partial^2_{\varphi\varphi}f = \frac{1}{\cos^2(\theta)}[\partial_\varphi\{\partial_\varphi z\partial_z f + \partial_\varphi z\partial_z f + \partial_\varphi z\partial_z f\}]$
$= \frac{1}{\cos^2(\varphi)}\{[\partial^2_{\varphi\varphi}x\partial_x f + \partial^2_{\varphi\varphi}y\partial_y f + (\partial_\varphi x)^2\partial^2_{xx}f + (\partial_\varphi y)^2\partial_y f + 2\partial_\varphi x\partial_\varphi y\partial^2_{xy}f]\}$
$= \frac{-1}{\cos^2(\varphi)}[x\partial_x f + y\partial_y f] + \frac{1}{\cos(\theta)}[(\partial_\varphi x)^2\partial^2_{xx}f + (\partial_\varphi y)^2\partial_y f + 2\partial_\varphi x\partial_\varphi y\partial^2_{xy}f]$

y finalmente procedemos a agrupar terminos semejantes:
$\partial_x f\{2x - \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\partial_\theta x - x - \frac{x}{\cos^2(\theta)}\} = 0$

$\partial_y f\{2y - \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\partial_\theta y - y - \frac{y}{\cos^2(\theta)}\} = 0$
$\partial_z f\{2z - \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\partial_\theta z - z\} = 0$
$\partial^2_{xy} f\{2xy + 2\partial_\theta x \partial_\theta y + \frac{2}{\cos^2(\theta)}\partial_\varphi x \partial_\varphi y\} = 0$
$\partial^2_{xz} f\{2xz + 2\partial_\theta x \partial_\theta z\} = 0$
$\partial^2_{yz} f\{2yz + 2\partial_\theta y \partial_\theta z\} = 0$
$\partial^2_{xx} f\{x^2 + (\partial_\theta x)^2 + \frac{(\partial_\varphi x)^2}{\cos^2(\theta)}\} = \partial^2_{xx} f$
$\partial^2_{yy} f\{y^2 + (\partial_\theta y)^2 + \frac{(\partial_\varphi y)^2}{\cos^2(\theta)}\} = \partial^2_{yy} f$
$\partial^2_{zz} f\{z^2 + (\partial_\theta z)^2\} = \partial^2_{zz} f$
Lo que termina la demostración.

P7 calculemos las derivadas de u conrespecto a las coordenadas circulares:

$$\begin{aligned}
\partial_r u &= \partial_x u \partial_r x + \partial_y u \partial_r y \\
&= \partial_x u \cos(\theta) + \partial_y u \sin(\theta) \\
\partial_(\theta) u &= \partial_x u \partial_\theta x + \partial_y u \partial_\theta y \\
&= -\partial_x u (r\sin(\theta)) + \partial_y u (r\cos(\theta)) \\
&= r\{-\partial_x u \sin(\theta) + \partial_y u \cos(\theta)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc}
(\partial_r u)^2 = & (\partial_x u)^2\cos^2(\theta) + (\partial_y u)^2 \sin^2(\theta) + 2(\partial_x u)(\partial_y x)\cos(\theta)\sin(\theta) \\
+ & + \\
\frac{1}{r^2}(\partial_\theta u)^2 = & \frac{r^2}{r^2}\{(\partial_x u)^2\sin^2(\theta) + (\partial_y u)^2\cos^2(\theta) - 2(\partial_x u)(\partial_y x)\cos(\theta)\sin(\theta)\} \\
(\partial_r u)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta u)^2 = & (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2
\end{array}$$

P8 sea $\vec{\mathbb{I}} = (1, ..., 1)^t$ (el vector de n unos) y sea $g(t) = t\vec{\mathbb{I}}$ y ,$pm(\vec{x}) = \frac{1}{n}\langle \vec{x}, \vec{\mathbb{I}}\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ entonces tenemos:
$G = f \; o \; g$ y
$H = G \; o \; pm$
y notemos que tanto g como $prom$ son lineales , y por ser $\mathbb{R}^n$ de dimensión finita continuas, entonces por regla de la cadena se tendra:
$G'(t) := DG(t)(1) = Df(g(t))oDg(t)(1) = \langle \nabla f(g(t)), g(1)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f(t\vec{\mathbb{I}})$
$\partial_{x_j} H(\vec{x}) := DH(\vec{x})(\vec{e_j}) = DG(pm(\vec{x}))oDpm(\vec{x})(e_j) = G'(pm(\vec{x}))\partial_{x_j} pm(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f(pm(\vec{x})\vec{\mathbb{I}})\frac{1}{n}$

P9 Para probar que f es lineal probaremos que f es igual a su diferencial en 0. En primer lugar dado que f es diferenciable en 0 en particular es continua en 0 y por lo tanto:
$f(0) = \lim_{n\to 0} f(\frac{1}{n}\vec{x}) = \lim_{n\to 0} \frac{1}{n} f(x) = 0$
Además como es diferenciable en 0 se tendrá que:
$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|f(h) - f(0) - Df(0)(h)\|}{\|h\|} = \lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|f(h) - Df(0)(h)\|}{\|h\|} = 0$
Con esto probemos que $\forall \; \hat{h} \in \mathbf{E}$ t'q $\left\|\hat{h}\right\| = 1$ se tiene:
$f(\hat{h}) = Df(0)(\hat{h})$
En efecto sea $\epsilon > 0$, entonces $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall \; 0 < \lambda < \delta$ se cumple:

$$
\begin{aligned}
\frac{\left\|f(\lambda\hat{h})-Df(0)(\lambda\hat{h})\right\|}{\left\|\lambda\hat{h}\right\|} &< \epsilon \\
\frac{\left\|f(\lambda\hat{h})-Df(0)(\lambda\hat{h})\right\|}{\lambda} &< \epsilon \\
\left\|\frac{1}{\lambda}f(\lambda\hat{h}) - \frac{1}{\lambda}Df(0)(\lambda\hat{h})\right\| &< \epsilon \\
\left\|f(\hat{h}) - Df(0)(\hat{h})\right\| &< \epsilon \ \forall\epsilon > 0
\end{aligned}
$$

Lo cual implica que: $f(\hat{h}) = Df(0)(\hat{h})$ para todo $\hat{h}$ unitario.
Ahora tomemos $\vec{h} \in \mathbf{E}$ entonces $\frac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|}$ es unitario y se tendrá:

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|}\right) &= Df(0)\left(\frac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|}\right) \\
\frac{1}{\|\vec{h}\|}f(\vec{h}) &= \frac{1}{\|\vec{h}\|}Df(0)(\vec{h}) \\
f(\vec{h}) &= Df(0)(\vec{h})
\end{aligned}
$$

y finalmente: $f(0) = 0 = Df(0)(0)$

[1]

[1] Hecho por Gonzalo Sánchez