Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas U. de Chile año 2005

Ejercicios capitulo 7 del apunte del curso MA22A

PROFESORES: RAFAEL CORREA, PEDRO GAJARDO

AUXILIARES: GONZALO SÁNCHEZ, RODOLFO GAINZA

PROBLEMAS DE MEDIDA:

P1) Demuestre que $\forall\ A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible se tiene que : $\forall\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ A+\vec{x} = \{\vec{a}+\vec{x}\ ,\ \vec{a} \in A\}$ y $\mu(A) = \mu(A+\vec{x})$

P2) Sean $A_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1},...,A_m \subseteq \mathbb{R}^{n_m}$ medibles y acotados, en R^{n_i}, μ_i medida de lebesgue en $\mathbb{R}^{n_i}$, y μ medida de lebesgue en $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_m}$. Pruebe que: $\mu(A_1 \times \cdots \times A_m) = \prod\limits_{i=1}^{m} \mu(A_i)$

P3) Sea $f:\ \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ una función continua y sea:
$G(f) = \{(\vec{x}, f(\vec{x})), \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$
Muestre que $G(f)$ es medible en $\mathbb{R}^n$ y de medida nula.

PROBLEMAS DE INTEGRACION:

P1) Probar que si C tiene medida nula entonces $\int\limits_C f = 0$ para toda funcion medible definida en C

P2) Sea $f:\ A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ integrable y sea $g = f$ salvo en un numero finito de puntos Probar que g es integrable y que $\int\limits_A f = \int\limits_A g$

P3) Sea $f:\ A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ una función no negativa talque $\int\limits_A f = 0$
Probar que $B = \{x \in A\ : f(x) \neq 0\}$ tiene medida nula. Ind: Prpbar que $\left\{x \in A\ : f(x) > \frac{1}{n}\right\}$ tiene medida cero.

P4) Utilizar el teorema de Fubini para dar una demostración sencilla de que $\partial^2_{xy} f = \partial^2_{yx} f$ si estas son continuas.
Ind.: si $\partial^2_{xy} f(x_0,y_0) - \partial^2_{yx} f(x_0,y_0) > 0$ existe un rectangulo entorno de (x_0,y_0) tal que $\partial^2_{xy} f - \partial^2_{yx} f > 0$ en este.

P5) Sea $f:\ [a,b] \times [c,d] \mapsto \mathbb{R}$ tal que $\partial_y f$ es continua. Se define $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$. Probar la regla de Leibnitz:

$$F'(y) = \int\limits_a^b \partial_y f(x,y)dx$$

1

Ind.: $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \left(\int_c^y \partial_y f(x,y)dy + f(x,c) \right) dx$

P6) Sea $f : [a,b]\times[c,d] \mapsto \mathbb{R}$ tal que $\partial_y f$ es continua se definen: $F(x,y) = \int_a^x f(t,y)dt$ y $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t,x)dt$. Calcular $\partial_x F$,$\partial_y F$ y $G'(x)$.

P7) Calcular:

$$a) \int_{-1}^{0}\int_{1}^{2} \left(x^2y^2 + xy^3\right) dydx \qquad c) \int_1^2\int_1^x\int_1^{x+y-1} dzdydx$$

$$b) \int_{-2}^{1}\int_{0}^{y^2} \left(x^2 + y\right) dxdy \qquad d) \int_{-1}^{1}\int_{0}^{|x|}\int_0^1 (x+y+z)dzdydx$$

P8) Calcular las integrales iteradas de $f(x,y) = x\sin(y)$ sobre el conjunto $\{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$

P9) Dibuje la Región $R = \left\{(x,y,z) : z \le 4 - 4x^2 - y^2,\ z \ge 0\right\}$ exprese el volumen de R como una integral triple y como una doble. Calcule el volumen de R.

P10) Probar que $\int_0^x\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n\cdots dx_2dx_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}f(t)dt$

P11) Sea $T(u,v) = (x,y) = (u+v, u^2-v)$ y $R = \{(u,v) : u+v \le 2,\ u \ge 0,\ v \ge 0\}$
a) Dibuje $S = T(R)$. b) Calcule $\int_S \frac{dxdy}{\sqrt{1+4x+4y}}$

P12) Sea $T(u,v) = (x,y) = (u, v(1+u^2))$ y $R = \{(u,v) : 0 \le u \le 3,\ 0 \le v \le 2\}$
a) Dibuje $S = T(R)$. b) Calcule $\int_S xdxdy$