Pauta Control 1 de Cálculo en Varias Variables

Prof. P. Felmer
Auxiliares: G. Espinoza
R. Menares
A. Prat

Pregunta 1, Control 1

1. a) i)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{ye^{xy}(1+cos^2(xy)) + (e^{xy}+z^2)\cdot 2cos(xy)sen(xy)y}{(1+cos^2(xy))^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{xe^{xy}(1+cos^2(xy)) + (e^{xy}+z^2)\cdot 2cos(xy)sen(xy)x}{(1+cos^2(xy))^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{2z}{1+cos^2(xy)}$$

Luego

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

ii) Para $f : I\!R^n \to I\!R^m$ diferenciable, la ecuación del plano tangente al grafo de f en el punto $(\vec{a}, f(\vec{a})), \vec{a} \in I\!R^n$, viene dada por:

$$\vec{w} = f(\vec{a}) + Df(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a}) = P(\vec{x}) \in I\!R^m$$

En este caso, $n = 3, m = 1, \vec{a} = (0,3,2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,3,2) = \frac{3\cdot 2}{2^2} = \frac{3}{2}; \frac{\partial f}{\partial y}(0,3,2) = 0, \frac{\partial f}{\partial z}(0,3,2) = 2f(0,3,2) = \frac{1+2*2}{2} = \frac{5}{2}$$

Luego

$$w = \frac{5}{2} + (\frac{3}{2}, 0, 2)\begin{matrix} x \\ y-3 \\ z-2 \end{matrix} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}x + 2(z-2)$$

$$\Rightarrow w = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}x + 2z \text{ es la ecuación del plano.}$$

también se puede entender como el conjunto

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}x + 2z \end{pmatrix} : x,y,z \in I\!R \right\}$$

b) p.d. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\|(x,y\|<\delta\Rightarrow|f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon$. Inicialmente, tomemos $\delta=\frac{r}{2}$, y $(x,y)\in B(0,0),\delta)$.

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(0,0)| &= |f(x,y)-f(0,y)+f(0,y)-f(0,0)|\\ &\leq |f(x,y)-f(0,y)|+|f(0,y)-f(0,0)|(*)\end{aligned}$$

sean $g_y(x)=f(x,y), h(y)=f(0,y)$.

Ambos son funciones de una variable, derivables en $(-\frac{r}{2},\frac{r}{2})$, continuas en $[-\frac{r}{2},\frac{r}{2}]$, gracias a que $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ existen.

Así, por el T.V.M., $\exists c_1\in(-|x|,|x|),\exists c_2\in(-|y|,|y|)$ tales que

$$g_y'(c_1)=\frac{f_y(x)-g_y(0)}{x};h'(c_2)=\frac{h(y)-h(0)}{y}.$$

En términos de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c_1,y)=\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x};\frac{\partial f}{\partial y}(0,c_2)=\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}$$

Usando que $(c_1,y),(0,c_2)\in B((0,0),\frac{r}{2})$, y que $\exists M>0$ tal que $|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)|\leq M,|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)|\leq M,\forall(x,y)\in B((0,0),\frac{r}{2})$ se concluye:

$$|f(x,y)-f(0,y)|\leq M|x|;|f(0,y)-f(0,0)|\leq M\cdot|y|$$

Aplicando esto a (*):

$$|f(x,y)-f(0,0)|\leq M(|x|+|y|)\leq M(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2})=2M\|(x,y)\|.$$

Luego tomando $\delta=\min\{\frac{r}{2},\frac{\varepsilon}{2M}\}$, se concluye. $\blacksquare$

1. Demostremos que $E(f)^c = \{(x,y)/y < f(x)\}$ es un conjunto abierto. Sea $(x_0, y_0) \in E(f)^c$, es decir $d := f(x_0) - y_0 > 0$. Sea $\varepsilon := d/4$. Como $\varepsilon > 0$, gracias a la continuidad de f en x_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Definamos $r := \min\{\varepsilon, \delta\} > 0$. Veamos que la bola abierta centrada en (x_0, y_0) y de radio r está contenida en $E(f)^c$. Sea $(x,y) \in B((x_0,y_0), r)$, entonces

$$\|(x,y) - (x_0,y_0)\| < r \Rightarrow |x - x_0| < r \leq \delta \text{ y } |y - y_0| < r \leq \varepsilon$$

por la elección de δ y de la definición de d tenemos

$$d = 4\varepsilon = \underbrace{f(x_0) - f(x)}_{<\varepsilon} + f(x) - y + \underbrace{y - y_0}_{<\varepsilon}$$

por lo tanto

$$f(x) - y > 2\varepsilon > 0 \Rightarrow f(x) > y \Rightarrow (x,y) \in E(f)^c$$

es decir,

$$B((x_0,y_0), r) \subseteq E(f)^c$$

Hemos de esta forma probado que $E(f)^c$ es abierto y por lo tanto $E(f)$ es un conjunto cerrado. ■

2. Los ejemplos más simples de funciones no continuas y con epígrafo cerrado, son las funciones continuas en todo $\mathbb{R}$, salvo en un punto x_0 donde la función presenta una discontinuidad de tipo salto y en ese punto la función toma el valor

$$f(x_0) := \min\{\lim_{x \to x_0^+} f(x), \lim_{x \to x_0^-} f(x)\}$$

Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Sea $(x,y) \in E(f)^c$, si $x \leq 0$ entonces $y < 0$ y la bola abierta $B((x,y), -y/2)$ está contenida en $E(f)^c$. Si $x > 0$, entonces $y < 1$ y si definimos $r := \min\{x/2, (1-y)/2\}$, se tiene que la bola abierta $B((x,y), r)$ está contenida en $E(f)^c$. De esta forma probamos que $E(f)^c$ es abierto y por lo tanto $E(f)$ es cerrado y sin embargo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no es continua.

Esto dice que la recíproca de la proposición anterior es falsa.

P3 (a)

$$F(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

Para demostrar diferencialidad, primero debemos calcular las derivadas parciales por definición en $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\|f(0+h,0)-f(0,0)\|}{|h|}=\lim_{h\to 0}\frac{\|f(h,0)\|}{|h|}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\|f(0,0+h)-f(0,0)\|}{|h|}=\lim_{h\to 0}\frac{\|f(0,h)\|}{|h|}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

luego el posible candidato a diferencial es $Df(0,0)(x)=0$, la función nula. Para ver que es diferenciable en $(0,0)$ basta ver que

$$\lim_{\vec{h}\to(0,0)}\frac{\|f(\vec{h})-f(0,0)-Df(0,0)(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|}=0$$

$$\lim_{\vec{h}\to(0,0)}\frac{\|f(\vec{h})-f(\vec{0})-Df(0,0)(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|}=0 \quad \text{pero } Df(0,0)(\vec{h})=0.$$

$$\lim_{\vec{h}\to(0,0)}\frac{\|f(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|}=\lim_{\vec{h}\to(0,0)}\frac{\frac{h_1^2h_2^2}{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{\vec{h})\to(0,0)}\frac{h_1^2h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/4}}$$

Ahora se usa la siguiente desigualdad elemental: $h_1^2+h_2^2\geq 2|h_1h_2|\geq |h_1h_2|$ $\Rightarrow (h_1^2+h_2^2)^2\geq (h_1h_2)^2$ luego se tiene

$$0\leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_1^2h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/4}}\leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}(h_1^2+h_2^2)^{1/2}=0$$

Por lo tanto f es diferenciable en (0,0).

(b)

$$F(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{y-x^2} & \text{si } y\neq x^2\\ 0 & \text{si } y=x^2\end{cases}$$

Veamos que $F(x,y)$ no es continua en $(0,0)$. Para eso tomemos el camino $x^2=y-y^2$ y veamos el límite por este camino cuando tiende a $(0,0)$. Para tener la continuidad el límite debería ser 0.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{y-x^2}=\lim_{y\to 0}\frac{(y-y^2)y}{y-(y-y^2)}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2(1-y)}{y^2}$$
$$=\lim_{y\to 0}y=1$$

el cual es distinto de 0, luego la función $F(x, y)$ no es continua en $(0, 0)$ (Obs: se podrían ver otros caminos) Si F fuera diferenciable en (0,0) sería continua también, luego la función $F(x, y)$ no era diferenciable en (0,0).