**UNIVERSIDAD DE CHILE**
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS

**PAUTA CONTROL 1**
MA22A Cálculo en Varias Variables
28 de Agosto de 2002

**Tiempo: 2 horas 45 minutos** Profesor: Cristian Pérez

1. *a*) Considere el conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ dado por $A = \{(x,y) : 0 < y < x \wedge x > 0\}$. Determine para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-y)y}{x^\alpha} & \text{si } (x,y) \in A, \\ 0 & \text{si } (x,y) \in A^c, \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R}^2$.

**Solución** [**2 puntos**] Sea $B = \{(0,0)\} \cup \{(x,0) : x > 0\} \cup \{(x,x) : x > 0\}$. $f$ es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus B$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ por ser el cuociente de funciones continuas en $A$ e idénticamente nula en $A^c \setminus B$ [**0/0.25**]. Si $(x_0, 0) \in B$, $x_0 > 0$, entonces

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0) \\ (x,y)\in A}} f(x,y) = 0 = f(x_0,0).$$

Si $(x_0, x_0) \in B$, $x_0 > 0$, entonces

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0) \\ (x,y)\in A}} f(x,y) = 0 = f(x_0,x_0).$$

Luego, $f$ es continua en $B \setminus \{(0,0)\}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ [**0/0.25/0.5**]. Resta estudiar el caso $(0,0) \in B$. Observamos que para todo $(x,y) \in A$ se tiene

$$\begin{aligned} |f(x,y)| = \frac{|x-y||y|}{|x|^\alpha} &\le \frac{\big(|x|+|y|\big)|y|}{|x|^\alpha} && \text{(Desigualdad triangular)} \\ &\le \frac{\big(|x|+|x|\big)|x|}{|x|^\alpha} = 2|x|^{2-\alpha} && (0 < y < x) \\ &\le 2\|(x,y)\|^{2-\alpha} && [\mathbf{0/0.25/0.5}]. \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in A}} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

si y sólo si $\alpha < 2$. Luego, $f$ es continua en $(0,0)$ para todo $\alpha < 2$ [**0/0.25/0.5**]. En consecuencia, $f$ es continua en $\mathbb{R}^2$ para todo $\alpha < 2$ [**0/0.25**].

*b*) Considere los conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^2$ dados por $A = \{(x,y) : x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$ y $B = \{(0,0)\} \cup \{(1/n\pi, 0) : n \in \mathbb{Z}^*\} \cup \{(0, 1/n\pi) : n \in \mathbb{Z}^*\}$, donde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Demuestre que la función $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\,\mathrm{sen}(1/x)\,\mathrm{sen}(1/y) & \text{si } (x,y) \in A, \\ 0 & \text{si } (x,y) \in B, \end{cases}$$

es continua en $A \cup B$.

**<u>Solución</u>** [**2 puntos**] $f$ es continua en $A$ por ser la compuesta y el producto de funciones continuas en $A$ [**0/0.25**]. Veamos la continuidad de $f$ en $B$. En primer lugar observamos que cada punto $(x_0, y_0) \in B$ es un punto de acumulación de $A$ [**0/0.25**]. Si $(x_0, y_0) = (0,0)$, entonces

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in A}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{(x+y)}^{\text{límite 0}}\overbrace{\mathrm{sen}(1/x)\,\mathrm{sen}(1/y)}^{\text{acotada}} = 0. \quad [\mathbf{0/0.5}]$$

Si $(x_0, y_0) = (1/n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}^*$, entonces

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in A}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1/n\pi,0)} \overbrace{(x+y)\,\mathrm{sen}(1/x)}^{\text{límite 0}}\overbrace{\mathrm{sen}(1/y)}^{\text{acotada}} = 0. \quad [\mathbf{0/0.5}]$$

Si $(x_0, y_0) = (0, 1/n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}^*$, entonces

$$\lim_{\substack{(x,y)(x_0,y_0)\\(x,y)\in A}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1/n\pi)} \overbrace{(x+y)\,\mathrm{sen}(1/y)}^{\text{límite 0}}\overbrace{\mathrm{sen}(1/x)}^{\text{acotada}} = 0. \quad [\mathbf{0/0.5}]$$

Luego, $f$ es continua en $B$ y, así, $f$ es continua en $A \cup B$.

*c*) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{1}{1-(x^2+y^2)}}$. Encuentre el dominio $A$ de $f$ y estudie la posibilidad de prolongar por continuidad $f$ a la adherencia de $A$. En caso de existir, defina la función continua resultante.

**<u>Solución</u>** [**2 puntos**] El dominio de $f$ es $A = \{(x,y) : f(x,y) \in \mathbb{R}\}$, es decir, $A = \{(x,y) : x^2+y^2 \neq 1\}$ [**0/0.25**]. Sea $B = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$. Entonces la adherencia de $A$ es $\mathbb{R}^2 = A \cup B$ [**0/0.25**]. Estudiemos la posibilidad de prolongar por continuidad $f$ a $A \cup B$. Como $f$ es la compuesta de funciones continuas en $A$, $f$ es continua en $A$ [**0/0.25**]. Para estudiar el caso del conjunto $B$ procedemos como sigue. Definiendo

$$g(t) = t^{\frac{1}{1-t}} \qquad \text{y} \qquad h(x,y) = x^2+y^2,$$

se tiene $f(x,y) = g\big(h(x,y)\big)$. Además

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)\in B} h(x,y) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to1} g(t) = \mathrm{e}^{-1}. \quad [\mathbf{0/0.25/0.5}]$$

Luego, para todo $(x_0, y_0) \in B$ se tiene

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in A}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g\big(h(x,y)\big) = \mathrm{e}^{-1},$$

por el teorema del límite de la función compuesta **[0/0.25/0.5]**. En consecuencia, sí es posible prolongar por continuidad $f$ a la adherencia de $A$, y la función continua resultante $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es definida por

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{\frac{1}{1-(x^2+y^2)}} & \text{si } x^2+y^2 \neq 1, \\ \mathrm{e}^{-1} & \text{si } x^2+y^2 = 1. \end{cases} \quad \textbf{[0/0.25]}$$

<u>**Nota**</u>

$$\begin{aligned} \lim_{t\to1} g(t) &= \lim_{t\to1} t^{\frac{1}{1-t}} = \lim_{t\to1} \exp\left(\frac{\ln t}{1-t}\right) = \exp\left(\lim_{t\to1} \frac{\ln t}{1-t}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{t\to1} \frac{1/t}{-1}\right) = \exp(-1) = \mathrm{e}^{-1}. \end{aligned}$$

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ y & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

*a*) Estudie la continuidad de $f$ en $\mathbb{R}^2$.

<u>**Solución**</u> **[1.5 puntos]** $f$ es continua en $A = \{(x,y) : x \neq 0\}$ por ser la compuesta y el cuociente de funciones continuas en $A$ **[0/0.25]**. Por otro lado, para todo $(0, y_0) \in A^{\mathrm{c}}$, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\(x,y)\in A}} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} y\frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy} \\ &= \left(\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} y\right)\left(\lim_{t\to0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right) = y_0 = f(0,y_0). \quad \textbf{[0/0.5/1]} \end{aligned}$$

Luego, $f$ es continua en $\mathbb{R}^2$ **[0/0.25]**.

*b*) Encuentre las derivadas parciales de $f$ y estudie su continuidad en $\mathbb{R}^2$.

<u>**Solución**</u> **[2.5 puntos]** Las derivadas parciales de la función $f$ son las funciones $f_x, f_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\cos(xy) - \operatorname{sen}(xy)}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \quad \textbf{[0/0.5]}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \cos(xy) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad \textbf{[0/0.5]}$$

$f_x$ es continua en $A = \{(x,y) : x \neq 0\}$ por ser la compuesta y el cuociente de funciones continuas en $A$ **[0/0.25]**. Por otro lado, para todo $(0, y_0) \in A^{\mathrm{c}}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\(x,y)\in A}} f_x(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{xy\cos(xy) - \operatorname{sen}(xy)}{x^2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} y^2 \frac{xy\cos(xy) - \operatorname{sen}(xy)}{(xy)^2} \\
&= \left(\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} y^2\right)\left(\lim_{t\to 0} \frac{t\cos t - \operatorname{sen} t}{t^2}\right) \\
&= 0 = f_x(0, y_0). \qquad \textbf{[0/0.25/0.5]}
\end{aligned}$$

Luego, $f_x$ es continua en $\mathbb{R}^2$ **[0/0.25]**. Finalmente, como $f_y(x,y) = \cos(xy)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, se sigue que $f_y$ es continua en $\mathbb{R}^2$ por ser la compuesta de funciones continuas en $\mathbb{R}^2$ **[0/0.25/0.5]**.

*c*) Estudie la diferenciabilidad de $f$ en $\mathbb{R}^2$.

<u>**Solución**</u> **[1 punto]** Como las derivadas parciales de $f$ son continuas en $\mathbb{R}^2$, por teorema $f$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ **[0/1]**.

*d*) Encuentre la matriz jacobiana de $f$ en $(\pi, 1)$ y calcule la ecuación del plano tangente al gráfico de $f$ en $(\pi, 1, 0)$.

<u>**Solución**</u> **[1 punto]** La matriz jacobiana de $f$ en $(\pi, 1)$ es la matriz fila

$$J\big(f,(\pi,1)\big) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(\pi,1) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(\pi,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\pi} & -1 \end{bmatrix}. \quad \textbf{[0/0.25/0.5]}$$

Por lo tanto, la ecuación del plano tangente al gráfico de $f$ en $(\pi, 1, 0)$ es

$$\begin{aligned}
z &= f(\pi,1) + Df(\pi,1)(x-\pi, y-1) \\
&= 0 + J\big(f,(\pi,1)\big) \begin{bmatrix} x-\pi \\ y-1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\pi} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-\pi \\ y-1 \end{bmatrix} \\
&= 2 - \tfrac{1}{\pi}x - y. \qquad \textbf{[0/0.25/0.5]}
\end{aligned}$$

3. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^n \wedge y \in \mathbb{R}^m\}$ provisto de la norma $\|(x,y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$. Sea $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una función bilineal, es decir, existe una función lineal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$B(x,y) = \langle L(x), y\rangle \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

*a*) Demuestre que existe una constante $C > 0$ tal que

$$|B(x,y)| \leq C\|x\|\|y\| \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

**<u>Solución</u>** [**1 punto**] Usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz y el hecho que $L$ es lineal, obtenemos

$$\begin{aligned} |B(x,y)| &= |\langle L(x), y\rangle| \leq \|L(x)\|\|y\| && \textbf{[0/0.5]} \\ &\leq C\|x\|\|y\|. && \textbf{[0/0.5]} \end{aligned}$$

*b*) Demuestre que para todo $(x,y),(h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ se tiene

$$B\big((x,y)+(h,k)\big) = B(x,y) + B(x,k) + B(h,y) + B(h,k).$$

**<u>Solución</u>** [**1 punto**] Usando el hecho que $L$ es lineal y la bilinealidad del producto interior, obtenemos

$$\begin{aligned} B\big((x,y)+(h,k)\big) &= B(x+h, y+k) \\ &= \langle L(x+h), y+k\rangle \\ &= \langle L(x)+L(h), y+k\rangle && \textbf{[0/0.5]} \\ &= \langle L(x), y\rangle + \langle L(x), k\rangle + \langle L(h), y\rangle + \langle L(h), k\rangle \\ &= B(x,y) + B(x,k) + B(h,y) + B(h,k). && \textbf{[0/0.5]} \end{aligned}$$

*c*) Demuestre que $B$ es continua en cada punto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Indicación: $B(x,y) = B(x-x_0+x_0, y-y_0+y_0)$.

**<u>Solución</u>** [**1.5 puntos**] Usando la indicación y la parte *b*), obtenemos

$$\begin{aligned} B(x,y) &= B(x-x_0+x_0, y-y_0+y_0) \\ &= B(x-x_0, y-y_0) + B(x-x_0, y_0) + B(x_0, y-y_0) + B(x_0,y_0). \end{aligned}$$

**[0/0.5]**

Luego, usando la desigualdad triangular y la parte *a*), obtenemos

$$\begin{aligned} |B(x,y) - B(x_0,y_0)| &\leq |B(x-x_0, y-y_0)| + |B(x-x_0, y_0)| + |B(x_0, y-y_0)| \\ &\leq C\big(\|x-x_0\|\|y-y_0\| + \|x-x_0\|\|y_0\| + \|x_0\|\|y-y_0\|\big). \end{aligned}$$

**[0/0.5]**

Por lo tanto, como el lado derecho de la desigualdad anterior tiende a 0 cuando $(x,y)$ tiende a $(x_0,y_0)$, se sigue que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} B(x,y) = B(x_0,y_0) \quad \forall\,(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

por el teorema del sandwich, es decir, $B$ es continua en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ [**0/0.5**].

*d*) Demuestre que $B$ es diferenciable en cada punto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ con

$$DB(x_0,y_0)(h,k) = B(h,y_0) + B(x_0,k) \quad \forall\,(h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

__**Solución**__ **[2.5 puntos]** Debemos demostrar que para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ se tiene

$$\lim_{(h,k)\to(\mathbf{0},\mathbf{0})} \frac{B\big((x_0,y_0)+(h,k)\big) - B(x_0,y_0) - DB(x_0,y_0)(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0. \quad \textbf{[0/0.5]}$$

Usando la parte $b$) y la diferencial de $B$ dada, vemos que el límite anterior se reduce a mostrar que

$$\lim_{(h,k)\to(\mathbf{0},\mathbf{0})} \frac{B(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0. \quad \textbf{[0/0.5/1]}$$

En efecto, usando la parte $a$), para todo $(h,k) \neq (\mathbf{0},\mathbf{0})$, se tiene

$$\frac{|B(h,k)|}{\|(h,k)\|} \leq \frac{C\|h\|\|k\|}{\|(h,k)\|} \leq \frac{C\|(h,k)\|^2}{\|(h,k)\|} = C\|(h,k)\|, \quad \textbf{[0/0.5/1]}$$

lo cual prueba que el límite que define la diferenciabilidad de $B$ es efectivamente 0.