UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS

PAUTA CONTROL 2

MA22A Cálculo en Varias Variables
2 de Octubre de 2002

Tiempo: 3 horas Profesor: Cristian Pérez

1. *a*) Sean $x = \mathrm{e}^s \cos t$, $y = \mathrm{e}^s \operatorname{sen} t$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Pruebe que si $g(s,t) = f(x,y)$ entonces

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{2s}}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Solución [**3 puntos**] Con el fin de simplificar la notación, observemos que

$$\frac{\partial x}{\partial s} = x, \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = y, \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = -y, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = x.$$

Luego, derivando g con respecto a s y t obtenemos

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y, \qquad [\mathbf{0.5}]$$
$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial x}y + \frac{\partial f}{\partial y}x. \qquad [\mathbf{0.5}]$$

Derivando nuevamente

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial s}\right)x + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\right)y + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y^2 + \frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y, \qquad [\mathbf{0.75}]\\
\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} &= -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right)y - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t}\right)x + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}y^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}x^2 - \frac{\partial f}{\partial x}x - \frac{\partial f}{\partial y}y. \qquad [\mathbf{0.75}]\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x^2 + y^2) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{e}^{2s}. \qquad [\mathbf{0.5}]$$

Nota: Se obtiene lo mismo derivando f con respecto a x e y, y usando el hecho que $s = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ y $t = \arctan(y/x)$.

b) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y suponga que $f(tx) = t^2 f(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \frac{1}{2}\big\langle H(f,0)x, x\big\rangle,$$

donde $H(f,0)$ es la matriz Hessiana de f en 0.

<u>Solución</u> [**3 puntos**] Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definida por $\phi(t) = (tx_1, \ldots, tx_n)$. La función ϕ es derivable para todo $t \in \mathbb{R}$, con $\phi'(t) = J(\phi, t) = (x_1, \ldots, x_n)$. Luego, derivando dos veces con respecto a t la igualdad $(f \circ \phi)(t) = t^2 f(x)$ obtenemos

$$(f \circ \phi)'(t) = J\big(f, \phi(t)\big)J(\phi, t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\big(\phi(t)\big)x_j = 2tf(x),$$

$$(f \circ \phi)''(t) = \sum_{j=1}^{n}\left[J\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}, \phi(t)\right)J(\phi, t)\right]x_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\big(\phi(t)\big)x_i x_j = 2f(x),$$

esto es, **[1.5]**

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\big(\phi(t)\big)x_i x_j \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

En particular, para $t = 0$

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)x_i x_j = \frac{1}{2}\big\langle H(f,0)x, x\big\rangle. \qquad \textbf{[1.5]}$$

<u>Nota</u>: Se obtiene lo mismo observando que f es una función cuadrática y luego escribiendo su desarrollo de Taylor de segundo orden en torno a 0.

2. *a*) Pruebe que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = (s, t) = \left(x + \frac{1}{2}\arctan y, y + \frac{1}{2}\arctan x\right)$$

admite una inversa local f^{-1} de clase C^1 alrededor de todo punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Calcule la aproximación afín de f^{-1} en una vecindad de $(s_0, t_0) = f(0, 1)$.

<u>Solución</u> [**3 puntos**] Basta aplicar el Teorema de la Función Inversa. En efecto, es claro que f es de clase C^1 (pues es C^∞). Además, para todo punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

1) $f(x_0, y_0) = (s_0, t_0)$,

2) $J\big(f, (x_0, y_0)\big) = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{2(1+y_0^2)} \\ \dfrac{1}{2(1+x_0^2)} & 1 \end{bmatrix}$ es invertible ya que

$$\det J\big(f, (x_0, y_0)\big) = 1 - \frac{1}{4(1+x_0^2)(1+y_0^2)} > 0. \qquad \textbf{[1.25]}$$

Entonces, por el Teorema de la Función Inversa,

1) existen vecindades U y V de (x_0, y_0) y (s_0, t_0), respectivamente, tales que $f : U \to V$ es biyectiva,
2) si $f^{-1} : V \to U$ es la inversa local de f, entonces f^{-1} es de clase C^1 y

$$J\big(f^{-1}, (s_0, t_0)\big) = \big[J\big(f, (x_0, y_0)\big)\big]^{-1}. \qquad \textbf{[0.75]}$$

La aproximación afín de f^{-1} en una vecindad W de $(s_0, t_0) = (\pi/8, 1) = f(0, 1)$ es la función $B : W \subseteq V \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$B(s,t) = f^{-1}(\pi/8, 0) + J\big(f^{-1}, (\pi/8, 0)\big) \begin{bmatrix} s - \pi/8 \\ t - 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} J\big(f^{-1}, (\pi/8, 0)\big) = \big[J\big(f, (0,1)\big)\big]^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1/4 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{8}{7} \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{7} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}. \qquad \textbf{[0.5]} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} B(s,t) &= (0,1) + \frac{2}{7} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s - \pi/8 \\ t - 1 \end{bmatrix} \\ &= (0,1) + \frac{2}{7}(4s - \pi/2 - t + 1, -2s + \pi/4 + 4t - 4) \\ &= \left(\frac{8s - 2t - \pi + 2}{7}, \frac{8t - 4s + \pi/2 - 1}{7} \right). \qquad \textbf{[0.5]} \end{aligned}$$

b) Pruebe que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^u + xy^2 + v &= 2, \\ \operatorname{sen} u + x^2 y + v^3 &= 1, \end{aligned}$$

define a u y v como funciones implícitas diferenciables de las variables x e y en una vecindad de $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, 2, 0, 1)$. Sean $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ las funciones implícitas cuya existencia se ha probado. Calcule

$$u(0,2), \quad v(0,2), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,2), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0,2), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0,2) \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y}(0,2).$$

Solución **[3 puntos]** Basta aplicar el Teorema de la Función Implícita. En efecto, consideremos $F : \mathbb{R}^{2+2} \to \mathbb{R}^2$ la función definida por

$$F\big((x,y),(u,v)\big) = (\mathrm{e}^u + xy^2 + v - 2, \operatorname{sen} u + x^2 y + v^3 - 1).$$

Es claro que F es de clase C^1 (pues es C^∞). Además,

1) $F\big((0,2),(0,1)\big) = (0,0)$,

2) $F_{(u,v)}\big((x,y),(u,v)\big) = \begin{bmatrix} e^u & 1 \\ \cos u & 3v^2 \end{bmatrix}$, y luego

$$F_{(u,v)}\big((0,2),(0,1)\big) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{es invertible.} \qquad \textbf{[1.0]}$$

Entonces, por el Teorema de la Función Implícita, existen vecindades U y W de $\big((0,2),(0,1)\big)$ y $(0,1)$, respectivamente, y una única función $g : W \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 definida por $g(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ tal que

1) $F\big((x,y), g(x,y)\big) = 0$ para todo $(x,y) \in W$,

2) $g(0,2) = \big(u(0,2), v(0,2)\big) = (0,1)$, y luego $u(0,2) = 0$ y $v(0,2) = 1$. **[0.75]**

Además,

$$\begin{aligned} J\big(g,(0,2)\big) &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,2) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(0,2) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(0,2) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(0,2) \end{bmatrix} \\ &= -\big[F_{(u,v)}\big((0,2),(0,1)\big)\big]^{-1} F_{(x,y)}\big((0,2),(0,1)\big) \\ &= -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left(\text{pues } F_{(x,y)}\big((x,y),(u,v)\big) = \begin{bmatrix} y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2 \end{bmatrix}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{[0.75]} \end{aligned}$$

de donde encontramos que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,2) = -6, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0,2) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0,2) = 2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y}(0,2) = 0. \qquad \textbf{[0.5]}$$

3. *a*) Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y sea $y_0 \in \mathbb{R}$ una raíz *simple* del polinomio con coeficientes reales

$$P(y) = a_0 + a_1 y + \cdots + a_n y^n,$$

es decir, $P(y_0) = 0$ y $P'(y_0) \neq 0$. Sea $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Pruebe que en una vecindad de $(0, y_0)$ la ecuación

$$F(x,y) = (a_0 + x_0) + (a_1 + x_1)y + \cdots + (a_n + x_n)y^n = 0$$

admite una única solución $y = g(x)$ de clase C^1 tal que

$$\nabla g(0) = -\frac{1}{P'(y_0)}(1, y_0, y_0^2, \ldots, y_0^n).$$

<u>**Solución**</u> [**3 puntos**] Basta aplicar el Teorema de la Función Implícita. En efecto, sea $F : \mathbb{R}^{(n+1)+1} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$F(x,y) = (a_0 + x_0) + (a_1 + x_1)y + \cdots + (a_n + x_n)y^n.$$

Es claro que F es de clase C^1 (pues es C^∞). Además,

1) $F(0, y_0) = P(y_0) = 0$,

2) $F_y(x, y) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = (a_1 + x_1) + \cdots + n(a_n + x_n)y^{n-1}$, y luego

$$F_y(0, y_0) = P'(y_0) \neq 0. \qquad \textbf{[1.0]}$$

Entonces, por el Teorema de la Función Implícita, existen vecindades U y W de $(0, y_0)$ y 0, respectivamente, y una única función $g : W \to \mathbb{R}$ de clase C^1 definida por $g(x) = y$ tal que

1) $F\big(x, g(x)\big) = 0$ para todo $x \in W$,

2) $g(0) = y_0$, y **[1.0]**

$$\begin{aligned} J(g, 0) &= -\big[F_y(0, y_0)\big]^{-1} F_x(0, y_0) \\ &= -\frac{1}{P'(y_0)} \begin{bmatrix} 1 & y_0 & y_0^2 & \ldots & y_0^n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

es decir, $\nabla g(0) = -\dfrac{1}{P'(y_0)}(1, y_0, y_0^2, \ldots, y_0^n)$. **[1.0]**

b) Encuentre el polinomio de Taylor $P_2(h_1, h_2)$ de segundo orden para la función $f(x, y) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} y$ en torno a $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Calcule una vecindad de $(0, 0)$ para que el error al usar P_2 en lugar de f sea menor que 10^{-2}.

Solución [**3 puntos**] El polinomio de Taylor de segundo orden para f en torno a $(0, 0)$ es

$$P_2(h_1, h_2) = f(0, 0) + \left\langle \nabla f(0, 0), \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle H\big(f, (0, 0)\big) \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \right\rangle, \qquad \textbf{[0.5]}$$

donde el gradiente y la matriz Hessiana están dados por

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \begin{bmatrix} \mathrm{e}^x \operatorname{sen} y \\ \mathrm{e}^x \cos y \end{bmatrix} &\Rightarrow\quad \nabla f(0, 0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ H\big(f, (x, y)\big) &= \begin{bmatrix} \mathrm{e}^x \operatorname{sen} y & \mathrm{e}^x \cos y \\ \mathrm{e}^x \cos y & -\mathrm{e}^x \operatorname{sen} y \end{bmatrix} &\Rightarrow\quad H\big(f, (0, 0)\big) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \textbf{[0.5]} \end{aligned}$$

Luego, como $f(0, 0) = 0$, se tiene que

$$P_2(h_1, h_2) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = h_2 + h_1 h_2. \qquad \textbf{[0.5]}$$

Como f es de clase C^3 (pues es C^∞), podemos aplicar la siguiente fórmula para el resto

$$R_2(h_1, h_2) = \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(c_1, c_2) h_i h_j h_k, \qquad \textbf{[0.5]}$$

donde $(c_1, c_2) \in SL\big((0, 0), (h_1, h_2)\big)$ (el segmento lineal que une $(0, 0)$ con (h_1, h_2)).

Las derivadas de tercer orden de f son

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} y, &&\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \mathrm{e}^x \cos y,\\
&\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -\mathrm{e}^x \cos y, &&\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = -\mathrm{e}^x \operatorname{sen} y. \qquad \textbf{[0.5]}
\end{aligned}$$

Supongamos que $\|(h_1, h_2)\| < \epsilon$. Esto implica que $|h_1| < \epsilon$, $|h_2| < \epsilon$, $|c_1| < \epsilon$ y $|c_2| < \epsilon$. Entonces, usando la desigualdad triangular, acotamos el resto de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
|R_2(h_1, h_2)| &\leq \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \left| \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(c_1, c_2) \right| |h_i||h_j||h_k| \\
&< \frac{1}{6}\epsilon^3 \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \left| \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(c_1, c_2) \right| \\
&= \frac{1}{6}\epsilon^3 \big(|\mathrm{e}^{c_1} \operatorname{sen} c_2| + 3|\mathrm{e}^{c_1} \cos c_2| + 3|-\mathrm{e}^{c_1} \operatorname{sen} c_2| + |-\mathrm{e}^{c_1} \cos c_2| \big) \\
&= \frac{1}{6}\epsilon^3 4\mathrm{e}^{c_1} \big(|\operatorname{sen} c_2| + |\cos c_2| \big) \\
&< \frac{4}{3}\epsilon^3 \mathrm{e}^{\epsilon},
\end{aligned}$$

ya que $\mathrm{e}^{c_1} < \mathrm{e}^{\epsilon}$, $|\operatorname{sen} c_2| \leq 1$ y $|\cos c_2| \leq 1$. Por lo tanto, una vecindad de $(0,0)$ para que el error al usar P_2 en lugar de f sea menor que 10^{-2} es $B\big((0,0), \epsilon\big)$ (la bola abierta de centro $(0,0)$ y radio ϵ), donde ϵ satisface la ecuación

$$\frac{4}{3}\epsilon^3 \mathrm{e}^{\epsilon} = 10^{-2}. \qquad \textbf{[0.5]}$$

<u>Nota</u>: Una solución aproximada de la ecuación anterior es $\epsilon \approx 0{,}1841$.

Recuerdos:

Teorema de la Función Inversa. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 y sea $x_0 \in A$ un punto tal que

1. $f(x_0) = y_0$,
2. $J(f, x_0)$ es invertible.

Entonces

1. existen vecindades U y V de x_0 e y_0, respectivamente, tales que $f : U \to V$ es biyectiva,
2. si $f^{-1} : V \to U$ es la inversa local de f, entonces f^{-1} es de clase C^1 y

$$Df^{-1}(y_0) = \big[Df(x_0)\big]^{-1} \qquad \text{o bien} \qquad J\big(f^{-1}, y_0\big) = \big[J(f, x_0)\big]^{-1}.$$

Teorema de la Función Implícita. Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 y sea $(x_0, y_0) \in A$ un punto tal que

1. $F(x_0, y_0) = 0$,
2. $F_y(x_0, y_0)$ es invertible.

Entonces existen vecindades U y W de (x_0, y_0) y x_0, respectivamente, y una única función $g : W \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que

1. $F\big(x, g(x)\big) = 0$ para todo $x \in W$,
2. $g(x_0) = y_0$, y

$$Dg(x_0) = -\big[D_yF(x_0, y_0)\big]^{-1} \circ D_xF(x_0, y_0) \qquad \text{o bien} \qquad J(g, x_0) = -\big[F_y(x_0, y_0)\big]^{-1} F_x(x_0, y_0),$$

donde $\big[F_x(x_0, y_0) | F_y(x_0, y_0)\big] = J\big(F, (x_0, y_0)\big)$.