U. DE CHILE

INGENIERIA

Control 1 MA–26A–03 Otoño 2000

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Prof.: Axel Osses, Auxs.: Sergio Acevedo, Rodrigo Blanch

P1.– **(i)** (2.5 ptos.) Encuentre la forma de la solución general de la EDO

$$y'' + 3y' + 2y = (x^2+1)e^x \sin 2x + 3e^{-x}\cos x + 4e^x.$$

(ii) (3.5 ptos.) Verifique que $y_1 = x^{-1/2}\sin x$, $y_2 = x^{-1/2}\cos x$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada a

$$4x^2y'' + 4xy' + (4x^2-1)y = 12x^{3/2}\sin x, \qquad x > 0.$$

Determine la solución y de la ecuación **no** homogénea tal que $\lim_{x\to\pi/2} x^{1/2}y = 0$ y además $\lim_{x\to\pi} x^{1/2}y = 0$.

P2.– La ecuación diferencial

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

donde a, b y c son constantes reales es llamada *ecuación de tipo Euler*. Tiene al menos una solución del tipo $y(x) = x^\lambda$.

(i) (0.5 ptos.) Deduzca que λ debe satisfacer

$$a\lambda(\lambda-1) + b\lambda + c = 0. \tag{1}$$

Sean λ_1 y λ_2 las raíces de (1). En cada uno de los casos siguientes encuentre una base **real** del espacio solución demostrando explícitamente la independencia lineal.

(ii) (1 pto.) λ_1 y λ_2 son reales y distintas.

(iii) (2 ptos.) $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$. (**Hint:** $x^\gamma = e^{\gamma \ln x}$).

(iv) (2.5 ptos.) $\lambda_1 = \lambda_2 = (a-b)/(2a)$.

P3.– Una estrella esferoidal de radio $a > 0$ está compuesta por un fluido compresible cuya presión $p(r)$ y densidad $\rho(r)$ son funciones radiales ($0 \le r \le a$) tales que $p = k\rho^2$ con k constante positiva. Si $g(r)$ es la gravedad a una distancia r del centro de la esfera, entonces un balance de momentos y la ley de gravitación nos dan las relaciones:

$$p' = -g(r)\rho(r), \qquad\qquad r^2 g(r) = 4\pi G\int_0^r s^2\rho(s)\,ds$$

donde G es la constante de gravitación universal y las derivadas están tomadas con respecto a r.

(i) (1.5 ptos.) Deducir que ρ satisface la ecuación diferencial

$$r\rho'' + 2\rho' + \alpha^2 r\rho = 0, \qquad \alpha^2 = \frac{2\pi G}{k}.$$

(ii) (3 ptos.) Determine $\rho(r)$ en términos de $\rho(0)$, la densidad del núcleo estelar.
(**Hint.:** Resuelva para $r\rho$. Note que $\rho(r)$ debe ser positiva y finita si $r \to 0$).

(iii) (1.5 ptos.) Explique por qué este modelo predice estrellas de máximo tamaño $a = \frac{\pi}{\alpha}$.

Tiempo: 2:30 horas