

**Control 1 MA26A-02 Otoño 2001**  
**ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS**  
 Profesor: Axel Osses, Prof. Auxiliar: Francisco Ortega

**P1.**– Resuelva las siguientes EDO:

- (i)  $(x^2 + 1)y'tan y = x$                       (ii)  $yy'' + (y')^2 = yy'$   
 (iii)  $x^2y' - 2xy = 3y^4$                       (iv)  $(D^2 - 1)y = 0, y(0) = 1, y'(1) = 1$   
 (v)  $y'' - 4y = \sinh(2x)$

**P2.**– Sean  $y_1, y_2$  dos soluciones distintas de la ecuación de Ricatti:

$$y' + p(x)y^2 + q(x)y + r(x) = 0 \quad \text{con } p, q \text{ y } r \text{ funciones continuas dadas.}$$

Demuestre que toda otra solución  $y$  satisface:

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = Ce^{\int p(y_2 - y_1)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(Suponga que  $y_1, y_2$  e  $y$  son derivables con derivada continua.)

**P3.**– Motivados por los movimientos de líquido que ocurren en la chimenea de una represa al cerrar una válvula (ver Fig. 1), estudiaremos el modelo simplificado del movimiento de un líquido incompresible en un tubo en U (ver Fig. 2).

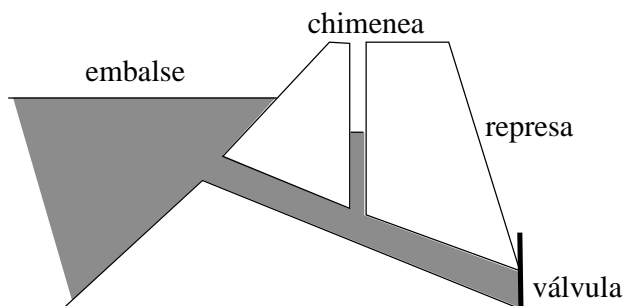


Fig. 1

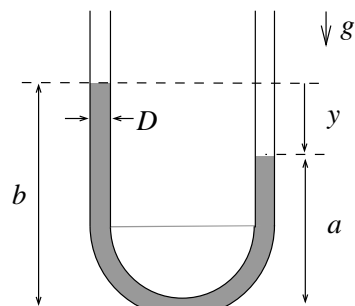


Fig. 2

La diferencia de altura  $y$  entre los extremos de la columna de líquido en forma de U de diámetro  $D > 0$ , largo  $L > 0$  y viscosidad  $\nu \geq 0$  sujeta a una aceleración de gravedad  $g > 0$ , satisface:

$$y'' + ky' + \omega y = 0, \quad t \geq 0, \quad k = \frac{32\nu}{D^2}, \quad \omega = \frac{2g}{L}.$$

Inicialmente  $y(0) = b - a$  e  $y'(0) = -v_0, v_0 > 0$  (ver Fig. 2).

- (i) (1.5 pts) Resuelva la ecuación con condiciones iniciales si  $\nu = 0$  (no hay fricción).  
 (ii) (3 pts) Si ahora  $\nu \neq 0$ , resuelva la ecuación con condiciones iniciales en los casos  $k^2 > 4\omega, k^2 = 4\omega, k^2 < 4\omega$ , discuta cualitativamente (gráfico) las soluciones y dé una interpretación física haciendo uso de una analogía mecánica.  
 (iii) (1.5 pts) En el caso  $k^2 < 4\omega$ , encuentre una condición sobre  $v_0$  en función de los parámetros del problema para evitar un rebalse, esto es:

$$|y(t)| \leq L/4, \quad \forall t \geq 0.$$