

CONTROL 1

MA26A-01 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Problema 1. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

- (i) (2pts.) $y' = 1 - x + y - xy$.
- (ii) (2pts.) $(1 + x^2)y' - xe^{-x}y = (1 - x)^2(y \ln y)$. Indicación: considere la sustitución $u = \ln y$.
- (iii) (2pts.) $(y^2 + \ln x)y' + x^3 + y/x = 0$.

Problema 2.

- (i) (2pts.) Encuentre una solución $y_1(x)$ no constante en el intervalo $[0, \pi]$ del problema con condición inicial $y' + \sqrt{1 - y^2} = 0$, $y(0) = 1$. Verifique que $y_2(x) \equiv 1$ también es una solución de este problema. ¿Contradice este hecho el teorema de existencia y unicidad? Explique.

- (ii) Considere la ecuación diferencial

$$y' = P(x)F(y) + Q(x)G(y), \quad (1)$$

donde P y Q son funciones continuas, F y G son derivables y G no es idénticamente nula.

- (ii.1) (2 pts.) Muestre que si

$$\frac{F'(y)G(y) - G'(y)F(y)}{G(y)} = C_0 \quad (2)$$

donde $C_0 \in \mathbb{R}$ es una constante, entonces la sustitución $u = F(y)/G(y)$ permite reducir la ecuación (1) a una EDO lineal de primer orden en u .

- (ii.2) (2 pts.) Resuelva la ecuación $y' = \tan(y) + \frac{1}{x} \sec(y)$ aplicando el método de la parte (ii.1). Indicación: comience por verificar que se satisface la condición (2) con $C_0 = 1$.

Problema 3.

- (i) Los psicólogos han establecido que bajos ciertas condiciones, la tasa de cambio de la cantidad aprendida por un estudiante en el instante t es directamente proporcional a la diferencia entre la cantidad total A por aprender y la cantidad $L(t)$ aprendida hasta ese instante. La constante de proporcionalidad $k > 0$ se conoce como la tasa de aprendizaje del estudiante.

- (i.1) (2 pts.) De acuerdo a lo anterior, establezca una EDO que modele la evolución en el tiempo de la cantidad $L(t)$ aprendida por el estudiante hasta el instante t . Asumiendo que $L(0) = 0$, pruebe que $L(t) = A(1 - e^{-kt})$. Bosqueje el gráfico de $L(t)$.

- (i.2) (1 pts.) Suponga que un estudiante debe aprender un total de $A = 200$ palabras de vocabulario técnico. Si el estudiante sabe que en los primeros 5 minutos es capaz de aprender 20 palabras, encuentre la tasa de aprendizaje k del estudiante. Determine cuántas palabras habrá aprendido al cabo de 10 minutos.

- (ii) (3 pts.) Dos estanques idénticos, denotados respectivamente I y II, tienen capacidad de $v > 0$ litros cada uno. Ambos estanques se encuentran conectados entre sí mediante una tubería y de cada uno de ellos sale una tubería que los comunica con el exterior. Inicialmente, ambos estanques están llenos de agua pura. Empezando en $t = 0$, una solución con a [gr/lit] (gramos por litro) de un solvente químico fluye dentro del estanque I a una tasa de b [lt/min] (litros por minuto). La mezcla luego pasa al estanque II y sale de él a la misma tasa. Asumiendo agitación completa en ambos estanques, muestre que la cantidad de químico en el estanque II después de transcurrido un tiempo $t > 0$ está dada por $av(1 - e^{-\frac{b}{v}t}) - abte^{-\frac{b}{v}t}$.