Universidad de Chile. Prof.: Felipe Alvarez.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática. Tiempo: 3:00 hrs.
Santiago, 20 de Abril de 2005.

CONTROL 1

MA26A-01 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Problema 1. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(i) (2.0 ptos.) $y' + (1 - y^2)\tan x = 0$.

(ii) (2.0 ptos.) $(x^2 + \lambda)y' + 2y^2 - 3xy - \lambda = 0$. Ind.: verifique que una solución particular es $y = x$.

(iii) (2.0 ptos.) $y'' - 2y' + 2y = e^{2x}\cos x$.

Problema 2.

(i) (2.0 ptos.) Muestre que la ecuación de segundo orden $(D-1)(xD+3)y = e^x$ puede resolverse al resolver sucesivamente las ecuaciones de primer orden $(D-1)u = e^x$ y $(xD+3)y = u$. Use esta técnica para encontrar la solución general de esta ecuación.

(ii) *Ecuación de Lagrange.* Abordaremos el problema de solucionar la ecuación diferencial:

$$y + x\varphi(y') + \psi(y') = 0 \tag{1}$$

donde $y = y(x)$ es la incógnita mientras que $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables que se suponen conocidas.

(a) (1.0 pto.) Usando el cambio de variables $p = y'$ transforme (1) en una ecuación diferencial para la nueva incógnita $p = p(x)$ que involucre a φ, ψ y sus primeras derivadas.

(b) (2.0 ptos.) Suponga además que la relación $p = p(x)$ es invertible de manera que podemos obtener $x = x(p)$. Pruebe que

$$h(p)\frac{dx}{dp} + \varphi'(p)x + \psi'(p) = 0$$

donde $h(p) := p + \varphi(p)$. Suponga que h no se anula nunca y determine soluciones de (1) como $x = x(p)$ e $y = y(p)$, lo que se conoce como solución paramétrica de (1).

(c) (1.0 pto.) Suponga ahora que existe p_0 tal que $h(p_0) = 0$, donde h es la función definida en la parte (b). Muestre que lo anterior ocurre si y sólo si $y(x) = p_0 x - \psi(p_0)$ es solución de la ecuación (1).

Problema 3.

(i) (3.0 pts.) *Resorte no lineal.* Un sistema masa-resorte consta de una partícula de masa $m > 0$ unida a un resorte de fuerza $F(x) = -kx + kx^3/a^2$, donde $k > 0$, $a > 0$ y x es la posición de la masa con respecto al equilibrio. Encuentre el potencial $V(x)$ y suponiendo que la energía inicial está dada por $E_0 = ka^2/4$, determine x en función de t.

(ii) (3.0 pts.) Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $4y'' + y = \dfrac{2}{\cos(x/2)}, \quad 0 < x < \pi/2.$

(b) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}.$