DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas UNIVERSIDAD DE CHILE

Prof. Felipe Alvarez Daziano

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
CONTROL 1 - Abril 1999

Tiempo: 3hrs.

P1.- (A) Encuentre la solución general de

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

(B) Sea $y_1 \not\equiv 0$ una solución conocida de la ecuación

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \tag{1}$$

en un intervalo I en el cual $a_2(x) \neq 0$.
(i) Pruebe que toda solución y de (**??**) satisface una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$y_1(x)\frac{dy}{dx} - y_1'(x)y = f(x)$$

donde f depende sólo de $a_1(x)$ y $a_2(x)$ (salvo una constante). Deduzca una expresión para una solución y_2 que sea linealmente independiente de y_1.
(ii) Usando lo anterior, determine una base del espacio solución de

$$y'' + (\tan x)y' - 6(\cot^2 x)y = 0$$

sabiendo que $y_1(x) = \sin^3(x)$ es solución.

P2.- *Ecuación de Euler de orden 2.* Consideremos la ecuación

$$x^2y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0,\ x > 0 \tag{2}$$

donde a y b son constantes.
(i) Pruebe que la solución general de (**??**) se puede escribir como

$$y(x) = C_1u_1(\ln x) + C_2u_2(\ln x)$$

con u_1 y u_2 soluciones de una ecuación homogénea a coeficientes constantes.
Ind.: Dada una solución $y(x)$ de (**??**), defina $u(t) = y(e^t)$ y estudie la ecuación que satisface $u(t)$.

(ii) Sean α_1 y α_2 las raíces del polinomio $p(\lambda) = \lambda^2 + (a-1)\lambda + b$. Escriba la solución general de (??) en términos de α_1 y α_2 (distinga 3 casos).
(iii) Utilizando lo anterior, pruebe que la solución general de $x^2y'' + xy' + 9y = 0$ está dada por $y(x) = C_1 \sin(3 \ln x) + C_2 \cos(3 \ln x)$.

P3.- (A) Consideremos un circuito eléctrico cerrado compuesto por una inductancia L y un condensador de capacidad C. El circuito está conectado a una fuente de corriente alterna de frecuencia ω dada por $E \sin(\omega t)$. Se sabe que, según las *leyes de Kirchhoff* para circuitos, la ecuación que gobierna la carga $q(t)$ en el condensador satisface la ecuación diferencial:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = E\sin(\omega t)$$

Resuelva esta ecuación y estudie qué pasa cuando $t \to \infty$ en los casos:
(i) $\omega \neq \frac{1}{\sqrt{LC}}$
(ii) $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

(B) Un isótopo radiactivo se desintegra a una tasa que es proporcional a la masa de isótopo presente.
(i) Si $x(t)$ representa la masa del isótopo al instante t, pruebe que $x(t) = x(0)e^{-\lambda t}$ para alguna constante λ (llamada constante de desintegración).
(ii) El tiempo T en el que la masa se reduce a la mitad se denomina *vida media* del isótopo. Sabiendo que la vida media del carbono 14 radiactivo es de 5600 años, determine la masa restante de carbono 14 al cabo de t años si inicialmente la masa de la muestra era x_0.
(iii) Si se sabe que para el año 2000 habrá decaído el 90% del carbono 14 presente en un cráneo encontrado en el valle central de Chile, determine el año de nacimiento del cavernícola a quien perteneció este cráneo.