**CONTROL 1 MA 26A, 2004/1**
**Prof. M. del Pino**
**Profs. Aux. W. Arriagada, C. Muñoz**
**Tiempo: 3 hrs.**

(1) (a) Resuelva el problema de condición inicial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}+y}, \quad y(0) = 1$$

exhibiendo el intervalo maximal de existencia de la solución .

(b) Resuelva el problema de valor inicial

$$(x^2 + x - y^2) - xy\frac{dy}{dx} = 0, \quad y(1) = 1,$$

exhibiendo el intervalo maximal de existencia de la solución .

(2) (a) Identifique por inspección una solución particular de la ecuación

$$y' = x^2 + \frac{y}{x} - y^2$$

y encuentre la solución de este problema tal que $y(1) = 2$.

(b) Considere la solución de la ecuación

$$y' = (1 + \sin^2(xy))y^2 + 1, \quad y(0) = 0,$$

definida en algún intervalo $]-a, a[$, $a > 0$.

(i) Pruebe que esta solución es impar, esto es, $y(-x) = -y(x)$.

(ii) Pruebe que, necesariamente, $a \leq \frac{\pi}{2}$.

(3) (a) Considere una ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$y''(t) + f(y(t)) = 0 \tag{3}$$

donde $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función continua con $f(s) \geq 0$ para todo $s > 0$. Sea $y(t)$ una solución de (3) definida en un intervalo $[0, T[$. Suponga que

$$A \equiv \int_{y(0)}^{\infty} f(s)\, ds < +\infty$$

y que $y'(0) > \sqrt{2A}$. Muestre entonces que $y'(t) > 0$ para todo $0 < t < T$.

*Hint* : Muestre primero que si $F$ es una primitiva de $f$, entonces

$$y'(t)^2 + 2F(y(t)) = \textit{constante}$$

para $t \in [0, T[$.

(b) Un cohete es lanzado en dirección radial desde la superficie de la Tierra. Sea $r(t)$ la distancia del cohete al centro de la Tierra. De acuerdo a la ley de gravitación de Newton, la aceleración del cohete, si se desprecian otros efectos está dada por

$$a(t) = r''(t) = -\frac{gR^2}{r(t)^2}$$

donde $R$ es el radio de la Tierra y $g > 0$ es una constante universal. Se le pide demostrar la siguiente afirmación: Si la velocidad inicial $v_0$ satisface $v_0 > \sqrt{2gR}$, entonces el cohete nunca regresa a la Tierra. Este último número es llamado *velocidad de escape*.