Control I MA 26A, Manuel del Pino

1. Encuentre la solución general de las ecuaciones **(a)**

$$y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0.$$

(b)

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} sen 2x + x^2 + 1$$

2. **(a)** Considere la *ecuación de Euler*

$$x^2 y'' + axy' + by = f(x), \quad x > 0,$$

donde a y b son constantes y f continua. Muestre que $y(x)$ es una solucio'n de este problema si y solo si la función $u(t) = y(e^t)$ satisface la ecuación

$$u'' + (a-1)u' + bu = f(e^t), \quad -\infty < t < \infty.$$

(b) Ayudándose de la parte anterior, y de la fórmula de variación de parámetros u otro método, encuentre la solución general de

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 e^{-x}.$$

3. **(a)** Considere la ecuación no-lineal

$$y'' + \frac{1}{x} y + y^3 = 0, \quad x \in [1, \infty).$$

Muestre que cualquier solución y de este problema debe tener un número infinito de ceros en $[1, \infty)$.

(b) Considere la ecuación

$$y'' + x^2 y = 0, \quad x \in [0, \infty),$$

Muestre que si $y(a) = 0$, entonces existe b tal que $a < b < a + \frac{\pi}{a}$, satisfaciendo $y(b) = 0$.

4. Sean $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ funciones continuas en $[0,1]$, y α, β dos constantes reales dadas. Considere el problema de encontrar una función $x : [0,1] \to R$ dos veces derivable que satisfaga

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t) \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

$$x(0) = \alpha, \quad x(1) = \beta. \tag{2}$$

Este problema se denomina *problema de condiciones de borde*. Supondremos que la función b satisface que $b(t) < 0$ para todo $t \in [0,1]$.

(a) Muestre que si $f(t) \leq 0$ en $[0,1]$ y $\alpha, \beta \geq 0$, entonces una solución x de (1)-(2) necesariamente satisface que $x(t) \geq 0$ para todo $t \in [0,1]$. (Este resultado se conoce como el *principio del máximo*).

Indicación: Suponga, por contradicción, que el punto t_0 donde x se minimiza en $[0,1]$, es tal que $x(t_0) < 0$. Entonces $t_0 \in]0,1[$. Por qué? Use que la ecuación se satisface en t_0 para concluir una contradicción.

(b) Pruebe que existe *a lo más* una solución del problema (1)-(2).

Indicación: Sean $x_1(t)$, $x_2(t)$ soluciones de (1)-(2). Use la ecuación satisfecha por $z = x_1 - x_2$ y la parte (a) para concluir que $z \equiv 0$.