U. DE CHILE

INGENIERIA

Control 2 MA–26A–04 Otoño 2000

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Prof.: Axel Osses, Auxs.: Sergio Acevedo, Rodrigo Blanch

P1.– Suponiendo que f es continua por pedazos y de orden exponencial, encuentre f tal que $f(0) = 0$ y que sea solución de la ecuación integro-diferencial siguiente

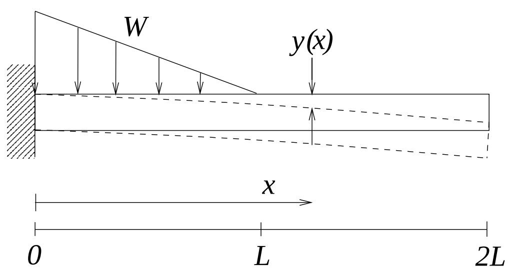
$$f'(t) = \sin t + \int_0^t f(t-\sigma)\cos(\sigma)\,d\sigma.$$

P2.– Al ser sometida a una carga W, la viga de la figura tiene una deformación $y(x)$ donde x es la variable longitudinal. Esto puede ser modelado por la EDO de cuarto orden

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = W(x)$$

para $0 \le x \le 2L$ con las siguientes condiciones de borde en los extremos $x = 0$ y $x = 2L$

$$y(0) = y'(0) = y''(2L) = y'''(2L) = 0.$$



La carga está distribuida sobre la viga como

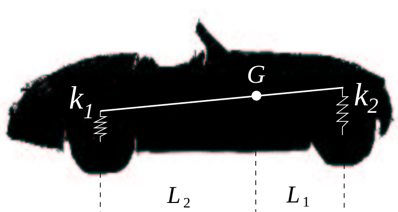
$$W(x) = \begin{cases} \frac{w_0}{L}(L-x) & \text{si } 0 \le x \le L \\ 0 & \text{si } L < x \le 2L \end{cases}$$

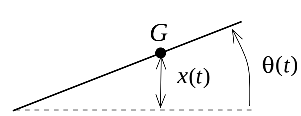
(i) (1 pto.) Escriba W usando la función escalón de Heaviside.
(ii) (3 ptos.) Usando transformada de Laplace y las dos primeras condiciones de borde, resuelva la ecuación expresando la solución en términos de $A = y''(0)$ y $B = y'''(0)$.
(iii) (2 ptos.) Calcule y', y'' e y'''. Determine los valores de A y B usando las dos últimas condiciones de borde.

P3.– Un modelo para estudiar el confort de un auto está dado por

$$x'' = -(k_1 + k_2)x + (k_1 L_1 - k_2 L_2)\theta$$
$$\theta'' = (k_1 L_1 - k_2 L_2)x - (k_1 L_1^2 - k_2 L_2^2)\theta$$

Las constantes k_1, k_2, L_1 y L_2 son respectivamente las rigideces y las distancias de los amortiguadores traseros y delanteros al centro de masas G del auto. En un instante $t > 0$ $x(t)$ representa la posición vertical de G y $\theta(t)$ el giro del auto en torno a G.





(i) (1 pto.) Definiendo un vector de estado $X = (x, \theta, x', \theta')^t$, reescriba el sistema como un sistema vectorial de primer orden $X' = AX$, $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

En lo que sigue suponga que $k_1 = \lambda k_2$ y $L_2 = \lambda L_1$ (en la práctica $0 < \lambda < 1$ pues G está hacia adelante del auto).
(ii) (0.5 ptos.) Explique por qué en este caso el sistema se desacopla.
(iii) (0.5 ptos.) Defina $k = k_2$ y $L = L_1$ y muestre que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ con } a = -(\lambda+1)k,\ b = -\lambda(\lambda+1)kL^2.$$

(iv) (3 ptos.) Calcule e^{tA} en función de k, L y λ. Puede usar series u otro método. Hint.: si usa series, encuentre expresiones para las potencias pares e impares de A.
(v) (1 pto.) ¿Cuál sería la solución en el caso de una frenada, esto es para $X(0) = (0, 0, -1, -1)$?.

Tiempo: 3:00 horas