U. DE CHILE

INGENIERIA

Control 2 MA26A–02 Otoño 2001

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Profesor: Axel Osses, Prof. Auxiliar: Francisco Ortega

P1.– Determine:

(i) (3pto) las soluciones homogéneas y la **forma** de la solución particular de $y''' + y' = 4e^{-x} + 3x \sin x$.

(ii) (3pto) la solución de $y'' - 4y' + 5y = f(t)$ con $f(t) = 1$ si $t \in [0, 1[$, $f(t) = 0$ si $t \in [1, \infty[$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Hint: $\frac{1}{s((s-a)^2+b^2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s-a)^2+b^2}$.

P2.– Definimos la siguiente transformada **lineal** del tipo "Mellin" para funciones $y(x)$ continuas para $x \in [0, 1]$:

$$M[y(x)](s) = \int_0^1 x^{s-1} y(x)\, dx \qquad s > 0 \text{ (cuando existe).}$$

(i) (1pto) Demuestre que $M[1] = \frac{1}{s}$ y que $M[x^a\, y](s) = M[y](s + a)$ para $a \in I\!R$.

(ii) (1.5pto) Demuestre que $M[xy'] = -sM[y] + y(1)$.

(iii) (1.5pto) Demuestre que $M[\int_x^1 y(u)/u\, du] = \frac{1}{s} M[y]$.

Hint: defina $z(x) = \int_x^1 y(u)/u\, du$ y use (ii).

(iv) (2pto) Resuelva la siguiente EDO usando la transformada de Mellin y las propiedades demostradas en los puntos anteriores:

$$x(xy')' + 2xy' = 1, \qquad y(1) = 0,\ y'(1) = 0.$$

Hint: Se sabe que si $M[f] = M[g]$ entonces $f = g$ para f, g continuas en $[0, 1]$

P3.– El siguiente es un modelo para la evolución de las masas atmosféricas en kilotoneladas [kton] de un contaminante en el hemisferio norte (c_1) y el hemisferio sur (c_2) de la Tierra:

$$c_1' = f_1 - \alpha(c_1 - c_2) - \beta c_1$$
$$c_2' = f_2 - \alpha(c_2 - c_1) - \beta c_2$$

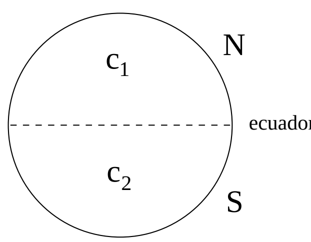

Fig. La atmósfera terrestre modelada como dos compartimientos.

La constante $\alpha > 0$ representa inverso del tiempo de intercambio interhemisférico en [1/año] y la constante $\beta > 0$ representa el inverso del tiempo de vida química del contaminante en [1/año]. Las emisiones del contaminante en cada hemisferio son constantes conocidas $f_1 = 30$ y $f_2 = 10$ en [kton/año]. Inicialmente $c_1(0) = 84$ y $c_2(0) = 60$ en [kton].

(i) (1pto) Introducimos la masa media entre los dos hemisferios como $\overline{c}(t) = (c_1(t) + c_2(t))/2$ y la emisión media como $\overline{f} = (f_1 + f_2)/2$. Deduzca una EDO y condiciones iniciales para $\overline{c}(t)$ y encuentre $\overline{c}(t)$.

(ii) (1pto) Si se estima que el límite de $\overline{c}(t)$ cuando $t \to +\infty$ es de 100 [kton], encuentre una estimación para β^{-1}, esto es, para los años de vida química del contaminante.

(iii) (2pto) Como $c_2 = 2\overline{c} - c_1$, basta ahora encontrar c_1. Para ello, aplique transformada de Laplace a las ecuaciones en c_1' y c_2'. Despeje la transformada de c_1 eliminando la transformada de c_2 y exprésela en términos de las funciones:

$\varphi_1(s) = \frac{1}{(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)}$, $\varphi_2(s) = \frac{s}{(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)}$, $\varphi_3(s) = \frac{1}{s(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)}$.

(iv) (2pto) Encuentre las antitransformadas de φ_1, φ_2 y φ_3. **Hint:** Sin le agradan las buenas recetas sepa que si $\varphi(s) = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b} + \frac{C}{s-c}$ con a, b y c distintos, entonces $A = \lim_{s \to a}(s - a)\varphi(s)$.