Departamento de Ingeniería Matemática. U. de Chile.
Control 2 MA–26A Sección 01
ECUACIONES EN DERIVADAS ORDINARIAS
Septiembre 1999. Prof.: Axel Osses, Aux.: Pedro Jara.

P1.–

(i) (2 ptos) Encuentre la solución homogénea y **la forma** que tiene una solución particular de la ecuación diferencial:

$$(D-1)^2(D^2+4)y = e^x \sin(2x) + \sin(2x) + xe^x.$$

(ii) (2 ptos) Encuentre la solución general de:

$$xy'' - (1+x)y' + y = x^2 e^{2x} \quad \text{para} \quad x > 0.$$

Hint.: Pruebe con $y = e^x$.

(iii) (2 ptos) Usando la sustitución $x = e^t$ u otro método, encuentre la solución general de:

$$x^2 y'' + xy' + y = x^2.$$

P2.– Considere la carga en un circuito eléctrico dada por la solución de la ecuación

$$q'' + \frac{R}{L} q' + \frac{1}{LC} q = E\cos(wt) \quad \text{para} \quad t > 0,$$

donde R, L y C son constantes (resistencia, inductancia y capacitancia del circuito). El término $E\cos(wt)$ representa una fuente de corriente alterna de frecuencia* w variable y amplitud E.

(i) (1 pto) Si $E = 0$ y $\frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{2L}\right)^2$, demuestre que la solución es una oscilación amortiguada de frecuencia $w_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ llamada "frecuencia natural" del circuito.

(ii) (3 ptos) Si $E = 1$ y $\frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{2L}\right)^2$, demuestre que solución particular de la carga en el circuito es de la forma $q(t) = A\cos(wt) + B\sin(wt)$ donde

$$\sqrt{A^2+B^2} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - w^2\right)^2 + \left(\frac{R}{L}w\right)^2}} = I(w).$$

Pruebe que $I(w)$ tiene un punto de máximo en

$$w_R = \sqrt{\frac{1}{LC} - 2\left(\frac{R}{2L}\right)^2}.$$

(iii) (2 ptos) Calcule $w_0^2 - w_R^2$. ¿Por qué se habla de resonancia cuando R/L es pequeño y la frecuencia de la fuente de corriente w está cerca de la frecuencia natural w_0?

---

* En realidad la frecuencia física es $w/(2\pi)$, pero para simplificar obviamos el factor $1/2\pi$.

P3.– Para $x > 0$, considere un operador diferencial lineal de orden n de la forma

$$P(xD) = \prod_{j=1}^{n} (xD - \lambda_j),$$

donde $\lambda_j \in I\!R$, $j = 1, \ldots, n$ son **todos diferentes** y por definición $(xD - \lambda_j)y = xy' - \lambda_j y$. Nuestro propósito es resolver la EDO homogénea:

$$P(xD)y = 0, \quad \text{con} \quad x > 0. \tag{H}$$

(i) (0.5 ptos) Demuestre que el orden de la composición en $P(xD)$ no importa. Para ello, demuestre que

$$(xD - \lambda_1)(xD - \lambda_2)y = (xD - \lambda_2)(xD - \lambda_1)y.$$

(ii) (1 pto) Demuestre las propiedades de traslación siguientes:

$$(xD - \lambda)x^\beta f = x^\beta (xD - \lambda + \beta) f \tag{PT1}$$

y en particular

$$(xD - \lambda)x^\beta = (\beta - \lambda)x^\beta. \tag{PT2}$$

(iii) (0.5 ptos) A partir de lo anterior demuestre que x^{λ_j} es solución de (H) para $j = 1, \ldots, n$.

(iv) (1.5 ptos) Demuestre ahora que $\{x^{\lambda_1}, \ldots, x^{\lambda_n}\}$ es un conjunto de funciones linealmente independientes. Puede usar determinantes o comportamiento en el infinito. En caso de usar determinantes, sacando factores apropiados, use que el determinante siguiente es no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1(\lambda_1 - 1)\cdots(\lambda_1 - (n-2)) & \ldots & \lambda_n(\lambda_n - 1)\cdots(\lambda_n - (n-2)) \end{vmatrix} \neq 0$$

si los λ_j son todos diferentes. En el caso de usar comportamiento asintótico, considere una combinación lineal de $x^{\lambda_1}, \ldots, x^{\lambda_n}$ con $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$. Compare entonces el comportamiento de cada término cuando $x \to \infty$.

(v) (1 pto) Demuestre que $< x^{\lambda_1}, \ldots, x^{\lambda_n} >$ genera el espacio solución de (H). Deduzca que (H) tiene como solución

$$y_h(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2} + \ldots + c_n x^{\lambda_n} \quad \text{para} \quad x > 0,$$

donde c_j, $j = 1, \ldots, n$ son constantes reales.

(vi) (1.5 ptos) Usando **sucesivamente** las propiedades de traslación $(PT1)$ y $(PT2)$, resuelva la ecuación **no homogénea** siguiente:

$$(xD - 3)(xD - 4)(xD - 5)(x^2 y) = x^{3/2} \quad \text{con} \quad x > 0.$$

Tiempo: 3h20 hrs.