Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 4 de Mayo de 2002.

Prof.: Felipe Alvarez Daziano.
Prof. Aux.: Waldo Arriagada.
Tiempo: 2:45 hrs.

CONTROL 2

MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias 2002

Problema 1.

Resuelva el problema con condición inicial

$$\begin{aligned} y''(t) + 4y(t) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ t-1, & t > 1, \end{cases} \\ y(0) = y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

utilizando tres formas distintas:

(a) (2.0 pts.) Aplicando directamente transformada de Laplace.

(b) (2.0 pts.) Determinando primero una función de Green para el operador $D^2 + 4$.

(c) (2.0 pts.) Resolviendo mediante el método de los coeficientes indeterminados el problema con condición inicial $y''(t) + 4y(t) = t - 1,\ y(1) = y_0,\ y'(1) = y_1$, para constantes y_0, y_1 adecuadas.

Problema 2.

(a) (2.0 pts.) Encuentre la solución general de la EDO: $4y'' + y = \dfrac{2}{\cos(x/2)}$, $0 < x < \pi/2$.

(b) (4.0 pts.) Sean $a(x)$ y $b(x)$ dos funciones continuas definidas en el intervalo $[0, 1]$. Sean $u(x)$ y $v(x)$ soluciones en $]0, 1[$ de las ecuaciones $u'' + a(x)u = 0$ y $v'' + b(x)v = 0$ respectivamente. Suponiendo que $u(0) = v(0)$, $u'(0) = v'(0)$, y que $\forall x \in]0, 1[$, $u(x) > 0$, $v(x) > 0$, pruebe que:

$$\text{Si } \forall x \in [0,1],\ a(x) < b(x) \text{ entonces } \forall x \in]0,1],\ u(x) > v(x).$$

Ind.: puede comenzar por demostrar que el wronskiano $W[u, v](x)$ es estrictamente decreciente en $[0, 1]$.

Problema 3.

(a) (3.0 pts.) Muestre que si $y(x)$ es solución de la ecuación $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$ donde los coeficientes son suficientemente regulares, entonces se satisface

$$\frac{d}{dx}[ay' + (b - a')y] + (a'' - b' + c)y = f(x).$$

Si además se tiene $a''(x) - b'(x) + c(x) = 0$ se dice que la ecuación es *exacta*, en cuyo caso se tiene

$$ay' + (b - a')y = \int f(x)dx + C,$$

para alguna constante $C \in \mathbb{R}$. Verifique que la ecuación de Euler $x^2y'' + 3xy' + y = \ln x$ es exacta y encuentre su solución general utilizando lo anterior.

(b) (3.0 pts.) Pruebe que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1 + \frac{1}{s}\right)\right\} = \frac{1 - e^{-t}}{t}.$$