DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS   UNIVERSIDAD DE CHILE

Prof. FELIPE ALVAREZ DAZIANO

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - CONTROL 2

Tiempo: 3hrs.

P1.- (a) Encuentre la solución de $y'' + 4y = F(t)$ que satisface $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$, donde

$$F(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$$

(b) Resolver $y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = t$, con condiciones iniciales $y(0) = 2,\ y'(0) = -3$.

P2.- (a) Consideremos la ecuación diferencial $y'' + \sin(x)y = 0$.
(i) Justifique la siguiente afirmación: esta ecuación admite dos soluciones l.i. en forma de series de potencias. ¿Cuál es el radio de convergencia ?
(ii) Encuentre los tres primeros términos no nulos de la solución en serie de potencias que satisface $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

(b) Encuentre una solución (no trivial) en forma de serie de potencias para $xy'' + 3y' - xy = 0$.

P3.- Consideremos un resorte elástico que cuelga de un extremo fijo y cuyo otro extremo es libre de oscilar en la dirección vertical. La ecuación que modela el movimiento de una masa m sujeta al extremo libre del resorte está dada por

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = h(t),$$

donde $y(t)$ es la posición de la masa en el instante t con respecto a la posición de equilibrio, $k > 0$ es la constante del resorte y $h(t)$ es una fuerza externa arbitraria. En lo que sigue, supondremos que inicialmente el sistema masa-resorte estaba en equilibrio de modo tal que $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.
(i) Pruebe que $y(t)$ admite la siguiente expresión integral:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{mk}} \int_0^t \sin(\omega(t - \xi))h(\xi)d\xi.$$

donde $\omega = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural del sistema masa-resorte.
(ii) Encuentre la solución explícita cuando:
(a) $h(t) \equiv h_0$ (constante)
(b) $h(t) = A\sin(\omega t)$. Recuerde que $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$.
(iii) Ahora queremos determinar la respuesta del sistema cuando la masa es "golpeada" sorpresivamente en un instante $t = a > 0$ luego de haber permanecido en reposo. Esta situación puede modelarse considerando una fuerza externa de la forma

$$h(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq a \\ 1/\sigma & a < t < a + \sigma \\ 0 & a + \sigma \leq t \end{cases}$$

donde $\sigma > 0$ es "pequeño". Físicamente, $h(t)$ representa una fuerza de magnitud $1/\sigma$ que actúa sobre el sistema durante un tiempo σ a partir del instante $t = a$. Determine la solución en este caso.