CONTROL 2 MA26A, 2004/1
Prof. M. del Pino
Profs. Aux. W. Arriagada, C. Muñoz
Tiempo: 3.5 hrs.

1. (a) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial
$$y'' - 2y' + 2y = 4e^{2x} + 2e^{x}\cos x\ .$$
(b) Encuentre la solución del problema de condiciones iniciales
$$x^2y'' + 2xy' - 6y = 50\frac{\ln x}{x^3}, \quad x > 0,$$
$$y(1) = 1, \quad y'(1) = 5.$$

2. (a) Encuentre la solución general en $\mathbb{R}$ de la ecuación
$$y'' + 2\tanh(x)\,y' + y = 0.$$
Indicación: Sea $\mathcal{L}(y) = y' + \tanh(x)\,y$. Calcule $\mathcal{L}(\mathcal{L}(y))$.
(b) Considere el problema de condiciones de borde
$$y'' + p(x)y = g(x) \quad x \in [a, b]\ ,$$
$$y(a) = y(b) = 0\ ,$$
donde p, g son funciones continuas en $[a, b]$. Demuestre que si $p(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces este problema posee solución y ésta es única.
Indicación: Cuando $g \equiv 0$, multiplique la ecuación por y y realice una integracion por partes.

3. (a) Considere el problema de condiciones de borde de cuarto orden
$$y^{(iv)} + p(x)y = g(x), \quad x \in [0, 1]\ , \tag{1}$$
$$y(0) = y''(0) = 0 = y''(1) = y(1) \tag{2}$$
donde p y g son funciones continuas en $[0, 1]$. Suponga que este problema para $g \equiv 0$ tiene sólo la solución $y \equiv 0$. Demuestre entonces que existe solución de (1)-(2) para cualquier función g continua en $[0, 1]$.
(b) Considere el problema
$$y^{(iv)} - \alpha^4 y = g(x), \quad x \in [0, 1]\ ,$$
$$y(0) = y''(0) = 0 = y''(1) = y(1).$$
Muestre que si $\alpha \neq k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ entonces este problema tiene solución única para cualquier función g continua en $[0, 1]$.