Control 3 MA–26A–04 Otoño 2000

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Prof.: Axel Osses, Auxs.: Sergio Acevedo, Rodrigo Blanch

P1.– Considere el sistema lineal para $t \geq 0$

$$X' = AX + Bu(t), \quad X(0) = X_0,$$

donde $A \in I\!R^{N\times N}$, $B \in I\!R^N$, $X_0 \in I\!R^N$ son constantes y $u(\cdot)$ es una función escalar. Dado $T > 0$, nuestro propósito es encontrar una función $u(t)$, $0 < t < T$ que lleve el estado al reposo en $t = T$, esto es tal que se satisfaga la condición final

$$X(T) = 0. \tag{CF}$$

Suponga que la función u es de la forma ($*$ denota transposición)

$$u(\sigma) = B^* e^{A^*(T-\sigma)} U_0$$

con $U_0 \in I\!R^N$ un vector constante.

(i) (2.5 p.) Demuestre que si la matriz

$$M = \int_0^T e^{A\sigma} BB^* e^{A^*\sigma}\, d\sigma$$

es invertible entonces (CF) se satisface si

$$U_0 = -M^{-1} e^{AT} X_0.$$

(ii) (1 p.) Demuestre que $e^{A^* t} = (e^{At})^*$. Esto le facilitará los cálculos que siguen.

(iii) (2.5 p.) Dados $T > 0$, $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in I\!R$ y X_0, determine en cuál de los casos siguientes es posible calcular U_0 por el método anterior. **(a)** $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, **(b)** $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (para simplificar use $\lambda = 0$ en el caso **(b)**).

P2.– Considere el sistema no lineal para $t \geq 0$

$$\begin{cases} x' = & 2xy \\ y' = & y^2 - x^2, \end{cases}$$

Para estudiar su comportamiento en el plano de fases se sugiere lo siguiente.

(i) (1 p.) Pruebe usando la regla de la cadena que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

(ii) (1.5 p.) Utilice lo anterior y el cambio de variables $z = y/x$ para demostrar que las trayectorias tienen la forma

$$x^2 + y^2 = k\,|x|\,,\ k > 0.$$

(iii) (2 p.) Demuestre que las trayectorias tienen simetría con respecto a los ejes. Usando coordenadas polares $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ dibuje una trayectoria para $k > 0$ y $0 \leq \theta \leq \pi/2$. ¿En qué puntos intersecta al eje y? Esboce a partir de estas informaciones un diagrama de fases aproximado del sistema en los cuatro cuadrantes del plano $0xy$.

(iv) (1.5 p.) Dibuje el sentido del tiempo en las trayectorias. Para ello observe el signo de y' si parte de las condiciones iniciales $(k, 0)$ y $(-k, 0)$ en el plano de fases.

P3.– Considere el siguiente sistema no lineal como modelo para una combustión:

$$\begin{cases} x' = 2xy^2 + x^2y + x^3, \quad x(0) = x_0 \\ y' = y^3 - x^3, \quad y(0) = y_0, \quad t \geq 0, \end{cases}$$

(i) (1 p.) Demuestre que el único punto crítico del sistema es $(x^*, y^*) = (0, 0)$.

(ii) Demuestre que, para condiciones iniciales no nulas, la solución del sistema diverge en tiempo finito, esto es, ocurre una **explosión**. Para ello siga las siguientes indicaciones:

(a) (1 p.) Para $\delta > 0$ considere $x_0^2 + y_0^2 = \delta^2$. Sea $(x(t), y(t))$, $t \geq 0$ la solución asociada a estas condiciones iniciales. Sea $R(t) = x^2(t) + y^2(t)$, $t \geq 0$. Demuestre que $R' = 2R^2$.

(b) (2.5 p.) Calcule $R(t)$ y pruebe que $R(t) \to +\infty$ si $t \to 1/(2\delta^2)$ por la izquierda.

(iii) (1.5 p.) A partir de lo anterior demuestre que el sistema es inestable en torno a $(0, 0)$.

Tiempo: 3:00 horas