Control # 3 MA26A-01 Primavera 2001

Prof: Felipe Alvarez D. - P.Aux: Francisco Ortega Culaciati

31 de Octubre de 2001

P1.- Sea $A \in M_{2\times 2}(I\!R)$ una matriz diagonalizable y considere el sistema de 2^o orden

$$(*) \quad \ddot{\vec{X}}(t) = A\vec{X}(t) \qquad t \in I\!R$$

(a) Pruebe que el conjunto solución de $(*)$ es un subespacio vectorial de $C^2(I\!R; I\!R^2)$ de dimensión 4.

(b) Verifique que una función de la forma $\vec{X}(t) = e^{\alpha t}\vec{v}$ con $\alpha \in \mathbb{C}$ y $\vec{v} \in I\!R^2 \setminus \{(0,0)\}$ es solución de $(*)$ *ssi* α^2 es valor propio de A y $\vec{v}$ es vector propio asociado a α^2.

(c) Suponga que $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$ son los valores propios de A. Pruebe que la solución general de $(*)$ está dada por

$$\vec{X}(t) = c_1 e^{\sqrt{\lambda_1}t}\vec{v}_1 + c_2 e^{-\sqrt{\lambda_1}t}\vec{v}_1 + c_3 e^{\sqrt{\lambda_2}t}\vec{v}_2 + c_4 e^{-\sqrt{\lambda_2}t}\vec{v}_2$$

con $\vec{v}_i$ vector propio de A asociado a λ_i, $i = 1, 2$.

(d) Suponga que $\lambda_1 = -\beta_1^2$ y $\lambda_2 = -\beta_2^2$ son los valores propios de A con $\beta_1 > 0$ y $\beta_2 > 0$. Pruebe que la solución está dada por :

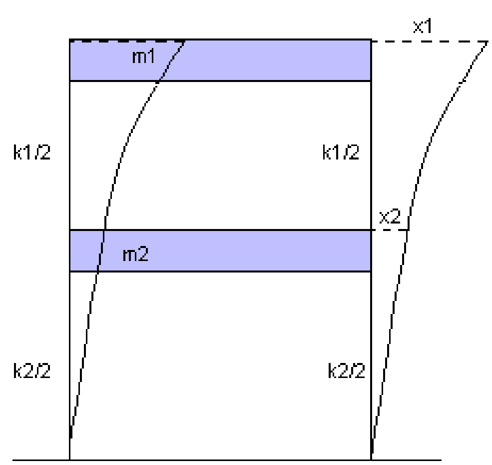
$$\vec{X}(t) = c_1 sen(\beta_1 t)\vec{v}_1 + c_2 cos(\beta_1 t)\vec{v}_1 + c_3 sen(\beta_2 t)\vec{v}_2 + c_4 cos(\beta_2 t)\vec{v}_2$$

con $\vec{v}_i$ vector propio de A asociado a λ_i, $i = 1, 2$.

(e) Los movimientos de la estructura de dos grados de libertad mostrada en la figura, quedan modelados por el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente:

$$(S) \quad \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_1x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_1x_1 + (k_1+k_2)x_2 = 0 \end{cases}$$

donde k_i y m_i son la rigidez total de las columnas del piso i y la masa concentrada a nivel de piso del piso i.



Se pide encontrar la solución general $\vec{X}(t)$ del sistema (S), es decir, las deformaciones de la estructura en el tiempo, dado que $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $k_1 = 2$ y $k_2 = 3$.

P2.- **(a)** Sea $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ invertible. Demuestre que dado $t_0 \geq 0$ se tiene

$$\forall t \in [t_0, +\infty), \qquad \int_{t_0}^{t} e^{\tau A} d\tau = A^{-1}(e^{tA} - e^{t_0 A})$$

Ind: Considere la función a valores matriciales

$$W(t) = \int_{t_0}^{t} e^{\tau A} d\tau - A^{-1}(e^{tA} - e^{t_0 A})$$

(b) Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente por el método de variación de parámetros.

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ tan(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

P3.- Se tiene la ecuación diferencial siguiente

$$(D+5)^3(D^2 - 4D + 13)y = 0 \qquad (E)$$

(i) Exprese mediante una sustitución adecuada la ecuación diferencial como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden del tipo

$$\vec{X}'(t) = A\vec{X}(t) \qquad (P)$$

(ii) Encuentre la solución general del sistema (P).

(iii) A partir de la solución encontrada en (ii),deduzca una expresión para la solución general de la ecuación (E).

Tiempo: 3:00 hrs.

Pauta Control #3 MA26A-01
31 de Octubre de 2001

P1.- (a) Se tiene el sistema $(*)\quad \ddot{\vec{X}}(t) = A\vec{X}(t) \quad t \in I\!R$, con $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Definiendo la sustitución $y_1 = \dot{x}_1$, $y_2 = \dot{x}_2$, se puede construir el vector ampliado $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, y con este vector puedo escribir el sistema de segundo orden como uno de primer orden, quedando como se ilustra a continuación:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(4\times 4)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

que es un sistema de primer orden de dimensión 4, luego la dimensión del espacio solución del sistema de primer orden es 4, y como la solución de $(*)$ son las dos primeras componentes de la solución del sistema ampliado de primer orden, se tiene que la dimensión del espacio solución del sistema $(*)$ es 4.

(b) Como tengo $\vec{X}(t) = e^{\alpha t}\vec{v}$, puedo calcular $\ddot{\vec{X}}(t) = \alpha^2 e^{\alpha t}\vec{v}$. Como $\vec{X}$ es solución de $(*)$, es decir satisface el sistema $(*)$, puedo reemplazarlos en la ecuación del sistema, luego queda:

$$\begin{gathered} \alpha^2 e^{\alpha t}\vec{v} = Ae^{\alpha t}\vec{v} \\ \Leftrightarrow e^{\alpha t}\{A\vec{v} - \alpha^2\vec{v}\} = 0 \quad \forall t \in I\!R \\ \Leftrightarrow \{A\vec{v} - \alpha^2\vec{v}\} = 0 \\ \Leftrightarrow \{A\vec{v} = \alpha^2\vec{v}\} \end{gathered}$$

de lo que se deduce que α^2 es valor propio de A y $\vec{v}$ es vector propio de A asociado a α^2 *ssi* $\vec{X}(t) = e^{\alpha t}\vec{v}$ es solución de $(*)$.

(c) Como $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ son son los valores propios de A y $\vec{v}_j$ es vector propio de A asociado al valor propio λ_j, se tiene por la parte (b) que una solución del sistema $(*)$ toma la forma $\vec{X}_j(t) = e^{\lambda_j^* t}\vec{v}_j^*$,con $\vec{v}_j^*$ vector propio de A asociado a λ_j^*, donde $\lambda_1^* = \sqrt{\lambda_1}$, $\lambda_2^* = -\sqrt{\lambda_1}$, $\lambda_3^* = \sqrt{\lambda_2}$, $\lambda_4^* = -\sqrt{\lambda_2}$, $\vec{v}_1^* = \vec{v}_2^* = \vec{v}_1$ y $\vec{v}_3^* = \vec{v}_4^* = \vec{v}_2$ luego se tienen 4 soluciones de $(*)$ que son:

$$\begin{gathered} \vec{X}_1(t) = e^{\sqrt{\lambda_1}t}\vec{v}_1 \\ \vec{X}_2(t) = e^{-\sqrt{\lambda_1}t}\vec{v}_1 \\ \vec{X}_3(t) = e^{\sqrt{\lambda_2}t}\vec{v}_2 \\ \vec{X}_4(t) = e^{-\sqrt{\lambda_2}t}\vec{v}_2 \end{gathered}$$

, pero hay que probar que son l.i..
Se tiene que como A es diagonalizable puedo asegurar que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son l.i. ya que son vectores propios de A, por lo que para demostrar que se tiene una base (4 vectores solución l.i. ya que la dimensión del espacio solución de $(*)$ es 4) basta demostrar que X_1 y X_2 son l.i. y además

que X_3 y X_4 son l.i., luego se tiene para $\vec{X}_1$ y $\vec{X}_2$ que:

$$\begin{aligned}
&c_1\vec{X}_1(t) + c_2\vec{X}_2(t) = 0\\
&\Leftrightarrow c_1e^{\sqrt{\lambda_1}t}\vec{v}_1 + c_2e^{-\sqrt{\lambda_1}t}\vec{v}_1 = 0\\
&\Leftrightarrow \{c_1e^{\sqrt{\lambda_1}t} + c_2e^{-\sqrt{\lambda_1}t}\}\vec{v}_1 = 0\\
&\text{ pero como } \vec{v}_1 \text{ es vector propio de A se tiene que } \vec{v}_1 \neq \vec{0}\text{, luego:}\\
&\Leftrightarrow c_1e^{\sqrt{\lambda_1}t} + c_2e^{-\sqrt{\lambda_1}t} = 0 \quad \forall t \in I\!R \quad (1)\\
&\text{si derivo la ecuación (1) queda:}\\
&\sqrt{\lambda_1}c_1e^{\sqrt{\lambda_1}t} - \sqrt{\lambda_1}c_2e^{-\sqrt{\lambda_1}t} = 0 \quad \forall t \in I\!R \quad (2)\\
&(1)\cdot\sqrt{\lambda_1} + (2)\\
&\Rightarrow \sqrt{\lambda_1}c_1e^{\sqrt{\lambda_1}t} + \sqrt{\lambda_1}c_2e^{-\sqrt{\lambda_1}t} + \sqrt{\lambda_1}c_1e^{\sqrt{\lambda_1}t} - \sqrt{\lambda_1}c_2e^{-\sqrt{\lambda_1}t} = 0\\
&\Rightarrow 2\sqrt{\lambda_1}c_1e^{\sqrt{\lambda_1}t} = 0 \quad \forall t \in I\!R\\
&\Rightarrow c_1 = 0\\
&\text{luego } c_1 = 0 \text{ en (2)} \Rightarrow c_2 = 0
\end{aligned}$$

luego con lo anterior se demuestra que $\vec{X}_1(t)$ y $\vec{X}_2(t)$ son soluciones l.i.. Análogamente se puede demostrar que $\vec{X}_3(t)$ y $\vec{X}_4(t)$ son soluciónes l.i. de $(*)$.
Luego, sabiendo que $C_f = \{\vec{X}_1(t), \vec{X}_2(t), \vec{X}_3(t), \vec{X}_4(t)\}$ es un conjunto de 4 soluciones l.i. de $(*)$, y que la dimensión del espacio solución de $(*)$ es 4, se tiene que C_f es un conjunto fundamental de soluciones de $(*)$, con lo que se concluye que la solución general de $(*)$ es:

$$\vec{X}(t) = c_1e^{\sqrt{\lambda_1}t}\vec{v}_1 + c_2e^{-\sqrt{\lambda_1}t}\vec{v}_1 + c_3e^{\sqrt{\lambda_2}t}\vec{v}_2 + c_4e^{-\sqrt{\lambda_2}t}\vec{v}_2$$

(d) Como $\lambda_1 = -\beta_1^2 < 0$ y $\lambda_2 = -\beta_2^2 < 0$ son son los valores propios de A y $\vec{v}_j$ es vector propio de A asociado al valor propio λ_j, se tiene por la parte (b) que una solución del sistema $(*)$ toma la forma $\vec{X}_j(t) = e^{\lambda_j^* t}\vec{v}_j^*$, donde $\lambda_{1,2}^* = \pm i\beta_1$, $\lambda_{3,4}^* = \pm i\beta_2$, $\vec{v}_{1,2}^* = \vec{v}_1$ y $\vec{v}_{3,4}^* = \vec{v}_2$.
Luego para $\lambda_{1,2}^*$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&e^{\lambda_{1,2}^* t}\vec{v}_{1,2}^* = e^{i\beta_1}\vec{v}_1\\
&= cos(\beta_1 t)\vec{v}_1 + isen(\beta_1 t)\vec{v}_1
\end{aligned}$$

de donde se reconocen dos soluciones linealmente independientes, que son la parte real y la parte imaginaria de la solución asociada al valor propio $\lambda_{1,2}^* = \pm i\beta_1$, quedando:

$$\vec{X}_1(t) = cos(\beta_1 t)\vec{v}_1 \text{ y } \vec{X}_2(t) = sen(\beta_1 t)\vec{v}_1$$

Ahora para $\lambda_{3,4}^*$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&e^{\lambda_{3,4}^* t}\vec{v}_{3,4}^* = e^{i\beta_2}\vec{v}_2\\
&= cos(\beta_2 t)\vec{v}_2 + isen(\beta_2 t)\vec{v}_2
\end{aligned}$$

de donde se reconocen dos soluciones linealmente independientes, que son la parte real y la parte imaginaria de la solución asociada al valor propio $\lambda_{3,4}^* = \pm i\beta_2$, quedando:

$$\vec{X}_3(t) = cos(\beta_2 t)\vec{v}_2 \text{ y } \vec{X}_4(t) = sen(\beta_2 t)\vec{v}_2$$

Ahora como la matriz A es diagonalizable se tiene que los vectores propios de A ($\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$) son linealmente independientes , luego se tiene que las 4 soluciones encontradas son l.i., con lo que se tiene que $\{\vec{X}_1(t), \vec{X}_2(t), \vec{X}_3(t), \vec{X}_4(t)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de $(*)$, con lo que la solución general de $(*)$ queda:

$$\vec{X}(t) = c_1sen(\beta_1 t)\vec{v}_1 + c_2cos(\beta_1 t)\vec{v}_1 + c_3sen(\beta_2 t)\vec{v}_2 + c_4cos(\beta_2 t)\vec{v}_2$$

(e) Utilizando los valores numéricos que se nos dan para las constantes k_1,k_2,m_1 y m_2,las ecuaciones del sistema (S) quedan

$$\begin{array}{c} \ddot{x}_1 = -\frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_1}{m_1}x_2 = -2x_1 + 2x_2 \\ \ddot{x}_2 = \frac{k_1}{m_2}x_1 - \frac{k_1+k_2}{m_2}x_2 = 2x_1 - 5x_2 \end{array}$$

lo que escrito en forma de un sistema de 2^o orden del tipo $(*)$ queda:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Para encontrar la solución de este sistema trataremos de utilizar alguno de los resultados anteriores, para ello obtendremos los valores propios de la matriz A como sigue:

$$det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} -(2+\lambda) & 2 \\ 2 & -(5+\lambda) \end{pmatrix} = (2+\lambda)(5+\lambda) - 4 = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$$

$$\begin{array}{c} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-7-\sqrt{49-24}}{2} = \frac{-7-5}{2} = -6 \\ \Rightarrow \lambda_2 = \frac{-7+\sqrt{49-24}}{2} = \frac{-7+5}{2} = -1 \end{array}$$

Inmediatamente se reconoce que los valores propios de A son de la forma $\lambda_1 = -\beta_1^2$ con $\beta_1^2 = 6$ y $\lambda_2 = -\beta_2^2$ con $\beta_2^2 = 1$, por lo que puedo usar la parde (d) para resolver el problema.
Luego falta obtener los vectores propios de A, lo haremos de la siguiente manera:
Para $\lambda_1 = -6$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 4z_1 + 2z_2 = 0 \\ \Rightarrow z_2 = -2z_1 \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -z_1 + 2z_2 = 0 \\ \Rightarrow z_2 = \frac{1}{2}z_1 \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Luego de la parte (d) se concluye que la solución general del sistema (S) viene dada por:

$$\vec{X}(t) = \{c_1 sen(\sqrt{6}t) + c_2 cos(\sqrt{6}t)\} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \{c_3 sen(t) + c_4 cos(t)\} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

P2.- **(a)** Demostrar la igualdad

$$\forall t \in [t_0, +\infty), \quad \int_{t_0}^{t} e^{\tau A} d\tau = A^{-1}(e^{tA} - e^{t_0 A})$$

es equivalente a demostrar que la siguiente función (la de la indicación) es identicamente nula $\forall t \geq t_0$, es decir, demostrar que

$$W(t) = \int_{t_0}^{t} e^{\tau A} d\tau - A^{-1}(e^{tA} - e^{t_0 A}) \equiv 0 \quad \forall t \geq t_0$$

Veamos:
si calculamos la derivada de W, se tiene:

$$\frac{dW}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t} e^{\tau A} d\tau\right) - \frac{d}{dt}\left(A^{-1}(e^{tA} - e^{t_0 A})\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dt}(t) = e^{tA}\frac{dt}{dt} - e^{t_0 A}\frac{dt_0}{dt} - \underbrace{A^{-1}A}_{\mathbf{I}} e^{tA}$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dt}(t) = e^{tA} - I e^{tA}$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dt}(t) = e^{tA} - e^{tA} = 0$$

$$\Rightarrow W(t) = [C] \quad \text{es decir, } W \text{es una matriz constante } \forall t \geq t_0$$

$$\Rightarrow W(t) = \int_{t_0}^{t} e^{\tau A} d\tau - A^{-1}(e^{tA} - e^{t_0 A}) \equiv [C] \quad \forall t \geq t_0$$

En particular para $t = t_0$ se tiene que

$$W(t = t_0) = \int_{t_0}^{t_0} e^{\tau A} d\tau - A^{-1}(e^{t_0 A} - e^{t_0 A}) \equiv [0] \equiv [C]$$

con lo que se tiene que la matriz $[C] \equiv [0]$ (ie, es la matriz nula), con lo que se demuestra la igualdad

$$\forall t \geq t_0, \quad \int_{t_0}^{t} e^{\tau A} d\tau = A^{-1}(e^{tA} - e^{t_0 A})$$

Nota: con esto se define la integral de la matriz exponencial.

(b) Para resolver el sistema hay que encontrar primero la matriz fundamental $[\phi]$ de la solución, para ello se procede como sigue:

Obtención de los valores y vectores propios de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

Luego para $\lambda = i$:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -iz_1 + z_2 = 0 \\ \Rightarrow z_2 = iz_1 \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

luego se tiene que

$$\begin{aligned} e^{it}\vec{v} &= (cos(t) + isen(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} cos(t) \\ -sen(t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} sen(t) \\ cos(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de donde se reconocen dos soluciones l.i. del sistema (la parte real y la parte imaginaria de la solución), con lo que se tiene que una matriz fundamental del sistema es:

$$[\phi]=\begin{pmatrix} cos(t) & sen(t) \\ -sen(t) & cos(t) \end{pmatrix} \text{ y su inversa: } [\phi]^{-1}=\begin{pmatrix} cos(t) & -sen(t) \\ sen(t) & cos(t) \end{pmatrix}$$

luego se tiene que la solución homogénea es

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_h=[\phi]\vec{c}=c_1\begin{pmatrix} cos(t) \\ -sen(t) \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} sen(t) \\ cos(t) \end{pmatrix}$$

y la solución particular viene dada por la fórmula de variación de parámetros

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_P=[\phi](t)\int_0^t [\phi]^{-1}(s)\begin{pmatrix} 0 \\ tan(s) \end{pmatrix}ds$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_P=\begin{pmatrix} cos(t) & sen(t) \\ -sen(t) & cos(t) \end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} cos(s) & -sen(s) \\ sen(s) & cos(s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ tan(s) \end{pmatrix}ds$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_P=\begin{pmatrix} cos(t) & sen(t) \\ -sen(t) & cos(t) \end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} -sen(s)tan(s) \\ cos(s)tan(s) \end{pmatrix}ds$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_P=\begin{pmatrix} cos(t) & sen(t) \\ -sen(t) & cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\int_0^t sen(s)tan(s)ds \\ \int_0^t cos(s)tan(s)ds \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_P=\begin{pmatrix} cos(t) & sen(t) \\ -sen(t) & cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\int_0^t \frac{sen^2(s)}{cos(s)}ds \\ \int_0^t sen(s)ds \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_P=\begin{pmatrix} cos(t) & sen(t) \\ -sen(t) & cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\int_0^t \frac{1-cos^2(s)}{cos(s)}ds \\ 1-cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_P=\begin{pmatrix} cos(t) & sen(t) \\ -sen(t) & cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\int_0^t sec(s)ds+\int_0^t cos(s)ds \\ 1-cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_P=\begin{pmatrix} cos(t) & sen(t) \\ -sen(t) & cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -ln(sec(t)+tan(t))+sen(t) \\ 1-cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_P=\begin{pmatrix} sen(t)-cos(t)ln(sec(t)+tan(t)) \\ sen(t)ln(sec(t)+tan(t))+cos(t)-1 \end{pmatrix}$$

Luego se tiene que la solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} cos(t) \\ -sen(t) \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} sen(t) \\ cos(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} sen(t)-cos(t)ln(sec(t)+tan(t)) \\ sen(t)ln(sec(t)+tan(t))+cos(t)-1 \end{pmatrix}$$

y evaluando en las condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde se deduce que para las condiciones iniciales nulas, se tiene que $c_1=c_2=0$, luego la solución del sistema con estas condiciones iniciales es

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} sen(t)-cos(t)ln(sec(t)+tan(t)) \\ sen(t)ln(sec(t)+tan(t))+cos(t)-1 \end{pmatrix}$$

P3.- **(i)** Para expresar la ecuación (E) primero hay que expandir los operadores como sigue:

$(D+5)^3(D^2-4D+13)y=0$

$\Leftrightarrow (D^3+15D^2+75D+125)(D^2-4D+13)y=0$

$\Leftrightarrow (D^5+11D^4+28D^3+20D^2+475D+1625)y=0$

$\Leftrightarrow y^{(5)}+11y^{(4)}+28y'''+20y''+475y'+1625y=0$

Ahora se aplica la siguiente sustitución,

$$\left.\begin{array}{r} y_1(t)=y(t)\\ y_2(t)=y'(t)\\ y_3(t)=y''(t)\\ y_4(t)=y'''(t)\\ y_5(t)=y^{(4)}(t)\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} y_1'(t)= & y'(t)=y_2(t)\\ y_2'(t)= & y''(t)=y_3(t)\\ y_3'(t)= & y'''(t)=y_4(t)\\ y_4'(t)= & y^{(4)}(t)=y_5(t)\\ y_5'(t)= & y^{(5)}(t)=-1625y_1-475y_2-20y_3-28y_4-11y_5\end{array}\right.$$

luego este sistema escrito en forma matricial (P) queda

$$\begin{pmatrix} y_1'\\ y_2'\\ y_3'\\ y_4'\\ y_5'\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -1625 & -475 & -20 & -28 & -11\end{bmatrix}}_{\text{A}}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\\ y_5\end{pmatrix}$$

(ii) Para encontrar la solución del sistema (P) hay que sacar los valores propios de $\mathbf{A}$, pero se tiene que el polinomio característico de este sistema es(por construcción) el polinomio característico de la ecuación (E), con lo que se tiene lo siguiente:

$det(A-\lambda I)=P_{(E)}(\lambda)=(\lambda+5)^3(\lambda^2-4\lambda+13)=0$

$\Rightarrow \lambda=5$ multiplicidad algebraica 3 y $\lambda=2\pm 3i$, son los valores característicos del sistema.

Ahora hay que obtener los vectores propios.
Para $\lambda=-5$:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1\\ -1625 & -475 & -20 & -28 & -6\end{bmatrix}\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\\ z_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} 5z_1+z_2=0\Rightarrow z_2=-5z_1\\ 5z_2+z_3=0\Rightarrow z_3=25z_1\\ 5z_3+z_4=0\Rightarrow z_4=-125z_1\\ 5z_4+z_5=0\Rightarrow z_5=625z_1\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \vec{v_{p1}}=\begin{pmatrix} 1\\ -5\\ 25\\ -125\\ 625\end{pmatrix}\Rightarrow \vec{Y_1}(t)=e^{-5t}\begin{pmatrix} 1\\ -5\\ 25\\ -125\\ 625\end{pmatrix}$$

Pero faltan dos soluciones asociadas a este valor propio, luego hay que buscar los vectores propios generalizados y las dos soluciones que faltan (asociadas al valor propio $\lambda=-5$) de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ -1625 & -475 & -20 & -28 & -6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 25 \\ -125 \\ 625 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 5z_1 + z_2 = 1 \Rightarrow z_2 = 1 - 5z_1 \\ 5z_2 + z_3 = -5 \Rightarrow z_3 = -10 + 25z_1 \\ 5z_3 + z_4 = 25 \Rightarrow z_4 = 75 - 125z_1 \\ 5z_4 + z_5 = -125 \Rightarrow z_5 = -500 + 625z_1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \vec{v_{p_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -10 \\ 75 \\ -500 \end{pmatrix} + z_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 25 \\ -125 \\ 625 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{Y_2}(t) = e^{-5t} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -10 \\ 75 \\ -500 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 25 \\ -125 \\ 625 \end{pmatrix} \right\}$$

$\vec{Y_3}(t) =?$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ -1625 & -475 & -20 & -28 & -6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -10 \\ 75 \\ -500 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 5z_1 + z_2 = 0 \Rightarrow z_2 = -5z_1 \\ 5z_2 + z_3 = 1 \Rightarrow z_3 = 1 + 25z_1 \\ 5z_3 + z_4 = -10 \Rightarrow z_4 = -15 - 125z_1 \\ 5z_4 + z_5 = 75 \Rightarrow z_5 = 150 + 625z_1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \vec{v_{p_3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -15 \\ 150 \end{pmatrix} + z_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 25 \\ -125 \\ 625 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{Y_3}(t) = e^{-5t} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -15 \\ 150 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -10 \\ 75 \\ -500 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 25 \\ -125 \\ 625 \end{pmatrix} \right\}$$

Ahora buscaremos los vectores propios y las soluciones asociadas al valor propio $\lambda = 2 + 3i$:

$$\begin{bmatrix} -(2+3i) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(2+3i) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(2+3i) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(2+3i) & 1 \\ -1625 & -475 & -20 & -28 & -11-(2+3i) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -(2+3i)z_1 + z_2 = 0 \Rightarrow z_2 = (2+3i)z_1 \\ -(2+3i)z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow z_3 = (-5+12i)z_1 \\ -(2+3i)z_3 + z_4 = 0 \Rightarrow z_4 = (-46+9i)z_1 \\ -(2+3i)z_4 + z_5 = 0 \Rightarrow z_5 = (-119-120i)z_1 \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v_{p_{4,5}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ -46 \\ -119 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \\ 9 \\ -120 \end{pmatrix}$$

$$e^{(2+3i)t}\vec{v_{p_{4,5}}} = e^{2t}(cos(3t) + isen(3t)) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ -46 \\ -119 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \\ 9 \\ -120 \end{pmatrix} \right\}$$

Luego las soluciones asociadas al valor propio $\lambda = 2 \pm 3i$ son

$$\Rightarrow \vec{Y}_4(t) = e^{2t}\left\{ cos(3t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ -46 \\ -119 \end{pmatrix} - sen(3t)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \\ 9 \\ -120 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \vec{Y}_5(t) = e^{2t}\left\{ cos(3t)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \\ 9 \\ -120 \end{pmatrix} + sen(3t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ -46 \\ -119 \end{pmatrix}\right\}$$

y la solución general del sistema queda dada por

$$\vec{Y}(t) = c_1\vec{Y}_1(t) + c_2\vec{Y}_2(t) + c_3\vec{Y}_3(t) + c_4\vec{Y}_4(t) + c_5\vec{Y}_5(t)$$

(iii) Para expresar la ecuación (E) en un sistema del tipo (P), se puede apreciar que se utilizó la sustitución $y_1 = y$, por lo que se puede identificar de la primera componente del vector solución del sistema (P) $\vec{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \\ y^{(4)} \end{pmatrix}$, la solución la ecuación (E), por lo que se tiene que

$$y(t) = y_1(t) = c_1e^{-5t} + c_2te^{-5t} + c_3t^2e^{-5t} + c_4e^{2t}cos(3t) + c_5e^{2t}sen(3t)$$

es la solución de la ecuación (E).