U. DE CHILE

INGENIERIA

Control 3 MA26A–02 Otoño 2001

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Profesor: Axel Osses, Prof. Auxiliar: Francisco Ortega

P1.– Considere el sistema discreto siguiente:

$$X_{n+1} = AX_n + B_n, \quad n \geq 0$$
$$X_0 \text{ dado en } \mathbb{R}^d$$

donde $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $B_n \in \mathbb{R}^d$, $n \geq 0$.

(i) (2pto) Demuestre que la solución está dada por

$$X_n = A^n X_0 + \sum_{j=0}^{n} A^{n-j} B_j, \quad n \geq 0$$

(ii) (2pto) Si $B_n = 0$, $n \geq 0$, y los valores propios de A son menores que 1 en módulo, demuestre que $X_n \to 0$ si $n \to \infty$. (Considere sólo el caso A diagonalizable).

(ii) (2pto) Suponga que la población de ballenas b, plancton p y temperatura del mar T están regidas por el siguiente sistema discreto, donde n designa el año y $\lambda > 0$ un parámetro de crecimiento:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \lambda b_n + p_n \\ p_{n+1} &= \lambda p_n + T_n \\ T_{n+1} &= \lambda T_n + 1 \\ b_0 = 10,\ p_0 &= 100,\ T_0 = 15 \end{aligned}$$

Resuelva las ecuaciones usando la fórmula que dedujo en el punto (i), calculando explícitamente A^n, $n \geq 0$. **Hint:** Puede servirle usar la formula del binomio, válida para $(M_1 + M_2)^n$ si M_1 y M_2 conmutan.

P2.– Para el sistema

$$X' = A(t)X + B(t), \quad t \geq 0$$
$$X(0) \text{ dado en } \mathbb{R}^d$$

donde $A(t) \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $B(t) \in \mathbb{R}^d$, y sus componentes son funciones continuas para $t \geq 0$.

(i) (4pto) Si $\Phi(t)$ es la matriz fundamental canónica del sistema, demuestre la siguiente fórmula de Abel generalizada:

$$\det(\Phi(t)) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{traza} A(t)\, dt\right).$$

Hint: Puede usar la siguiente fórmula para la derivada del determinante:

$$\frac{d}{dt}\det M(t) = \sum_{k=1}^{d} \det M_k(t)$$

donde $M_k(t)$ es la matriz que resulta al derivar la k-ésima fila de $M(t)$.

(ii) (2pto) Demuestre que la fórmula anterior generaliza la fórmula de Abel para las EDO lineales de orden n:

$$\frac{d}{dt}W(y_1, \ldots, y_n) = \exp\left(-\int_0^t \overline{a}_{n-1}(t)\, dt\right),$$

donde $\overline{a}_{n-1}(t)$ es el coeficiente del término de orden $n-1$ en la EDO normalizada.

P3.– La oscilación de un cable de largo $L > 0$ sujeto a gravedad g puede modelarse como las oscilaciones de N pequeños péndulos acoplados de largo L/N. Si la EDO de cada pequeño péndulo tiene la forma:

$$\frac{L^2}{N^2}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\theta_j'' + b_i\theta_i' + c_i\, g\theta_i = 0$$

donde a_{ij}, b_i y c_i son coeficientes conocidos.

(i) Suponiendo A invertible, escríbalo como un sistema de EDO lineales de primer orden.

(ii) Tome límite cuando $N \to \infty$.

Tiempo: 3 horas.