U. DE CHILE

INGENIERIA

Control #3 MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Semestre 2003-1, Prof. A. Osses, Auxs. A. de Laire, F. Ortega.

P1.- **(i)** (3pto) Calcule $e^{\mathbf{A}t}$ para

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) (3pto) Se tiene una matriz $B \in I\!\!R^{2\times 2}$ a coeficientes constantes, y el sistema definido para todo $t \geq 0$, por:

$$\left\{ \begin{array}{c} X' = BX + P(t) \\ X(0) = X_0 \end{array} \right. , \tag{1}$$

donde $X_0 \in I\!\!R^2$ y $P(t) = \begin{pmatrix} \alpha\delta(t) \\ \beta\delta(t) \end{pmatrix}$, con $\delta(t)$ la *delta de Dirac*, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.
Escriba una sistema de la forma

$$\left\{ \begin{array}{c} Y' = RY \\ Y(0) = Y_0 \end{array} \right. , \tag{2}$$

definido también para todo $t \geq 0$, donde la matriz $R \in I\!\!R^{2\times 2}$ es a coeficientes constantes, $Y_0 \in I\!\!R^2$, tal que la solución de (2) y la solución de (1) sean la misma.

P2.- Sea la matriz $B^2 \in M_{m\times m}(I\!\!R)$, dada por:

$$B^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

donde $\lambda > 0$ es una contante real.
Para una matriz $M \in M_{m\times m}(I\!\!R)$, se definen sus matrices seno y coseno como:

$$\cos(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n M^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n M^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(i) (5pto) Demuestre que

$$(\cos(B^2t))_{ij} = \begin{cases} (-1)^{r/2}\,\frac{t^r}{r!}\cos(\lambda t) & si \quad j-i=r\geq 0,\ r \quad par \\ (-1)^{(r+1)/2}\,\frac{t^r}{r!}\sin(\lambda t) & si \quad j-i=r\geq 0,\ r \quad impar \\ 0 & si \quad j-i<0 \end{cases}$$

Hint: Puede usar que si dos matrices P, Q conmutan ($PQ = QP$), entonces es válida la fórmula del Binomio de Newton:

$$(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{n-k}Q^k, \forall n \in I\!N.$$

Para efectuar el cálculo se sugiere seguir alguno de estos dos métodos distintos:

- Calcule primero $(B^2)^n, \forall n \in I\!N$, y para que su resultado se escriba de forma simple en una sola matriz, puede usar la convención $\binom{r}{k} = 0$, si $r < k$, para $r, k \in I\!N$. Explicite $(B^2)^{2n}$. Escriba la expresión de $\cos(B^2t)$ como una sola serie. Separando los casos $j-i \geq 0$ par, $j-i \geq 0$ impar, $j-i<0$, escriba la componente $(\cos(B^2t))_{ij}$.
- Escriba $\cos(B^2t)$ como una serie de una sumatoria (tenga cuidado al escribir los límites). Separando los casos $j-i \geq 0$ par, $j-i \geq 0$ impar, $j-i<0$, escriba la componente $(\cos(B^2t))_{ij}$. Por último note que la apropiada matriz N cumple con $(N^k)_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad j-i=k \\ 0 & si \quad j-i\neq k \end{cases}$

(ii) (1.5pto) Se define la matriz por bloques $C \in M_{2m\times 2m}(I\!R)$, dada por:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & B^2 \\ -B^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que

$$e^{Ct} = \begin{pmatrix} \cos(B^2t) & \sin(B^2t) \\ -\sin(B^2t) & \cos(B^2t) \end{pmatrix}.$$

Hint: Calcule primero C^{2n}, C^{2n+1} $\forall n \in I\!N$.

P3.- Sea el sistema a coeficientes variables definido para todo $t \in I\!R$ por:

$$X' = A(t)X, \tag{3}$$

donde la matriz $A(t) \in M_{n\times n}(I\!R)$ tiene coeficientes continuos $a_{ij}(t)$ en $I\!R$, que además son $T > 0$ periódicos, esto es:

$$a_{ij}(T+t) = a_{ij}(t),\ \forall t \in I\!R,\ \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental canónica del sistema (3) asociada a $t_0 = 0$.

(i) (3pto) Demuestre que $\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi(T),\ \forall t \in I\!R$.

(ii) (3pto) Suponga que la matriz $\Phi(T)$ tiene un valor propio $\lambda = 1$. Muestre que en tal caso el sistema (3) tiene una solución T periódica (i.e. $X(T+t) = X(t),\ \forall t \in I\!R$), para alguna condición inicial $X_0 \neq 0$ apropiada.