Departamento de Ingeniería Matemática. U. de Chile.
Control 3 MA–26A Sección 01
ECUACIONES EN DERIVADAS ORDINARIAS
Octubre 1999. Prof.: Axel Osses, Aux.: Pedro Jara.

P1.– Usando transformada de Laplace resuelva las dos ecuaciones siguientes:

(i) (3 ptos)

$$y''' + y'' + 9y' + 9y = b(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1,$$

con

$$b(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ a & \text{si } 2 \leq t < \infty \end{cases},\ a \in I\!R.$$

Hint: Observe que $s^3 + s^2 + 9s + 9 = (s+1)(s^2+9)$.

(ii) (3 ptos) Encuentre la solución de la ecuación integro-diferencial:

$$y' - \int_0^t y(s)\,ds = e^{-t}\cos(3t),\ t > 0,\ y(0) = 0.$$

Hint: Recuerde la descomposición $\frac{s}{(s+a)(s^2+bs+c)} = \frac{A}{s+a} + \frac{Bs+C}{s^2+bs+c}$.

P2.–

(i) (2 ptos) Usando el método que más le convenga, pruebe que

$$\text{si} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \alpha, \beta \in I\!R \quad \text{entonces} \quad e^{tB} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}.$$

(ii) (2 ptos) Aplicando **(i)** y justificando su resultado, calcule e^{tA} para la matriz

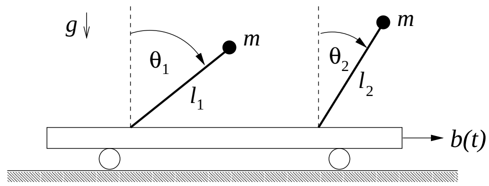
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ & -2 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 4 & 3 \\ & & & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(iii) (2 ptos) Resuelva $X' = AX$ con las condiciones iniciales $X(0) = (1,1,0,1,1)^T$ ¿Son las componentes de $X(t)$ acotadas cuando $t \to \infty$? Resuelva ahora el sistema para $X(0) = (0,0,1,0,0)^T$ ¿Es la solución acotada? ¿Qué condición general debe cumplir $X(0)$ para que las componentes de $X(t)$ sean acotadas cuando $t \to \infty$?

P3.– Considere el siguiente sistema oscilatorio móvil con incógnitas θ_1 y θ_2:

$$ml_1\theta_1'' = 2mg\theta_1 + mg\theta_2 + b(t) \tag{1}$$
$$ml_2\theta_2'' = mg\theta_1 + 2mg\theta_2 + b(t), \tag{2}$$

donde g, $l_1 > 0$, $l_2 > 0$, $m > 0$ son constantes y $b(t)$ es una función continua para $t \geq 0$ conocida. Inicialmente el sistema parte del reposo, esto es $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_1'(0) = \theta_2'(0) = 0$.



(i) (2 ptos) Definiendo $X = (\theta_1, \theta_2, \theta_1', \theta_2')^T$, escriba el sistema (1)-(2) de la forma

$$X' = AX + B(t) \tag{3}$$

donde $B(t) \in I\!R^4$ para cada $t \geq 0$ y $A \in I\!R^{4\times 4}$ tiene la estructura por bloques

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_{2\times 2} \\ M & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad M \in I\!R^{2\times 2}.$$

(ii) (2 ptos) Demuestre que se tiene la fórmula

$$e^{tA} = \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} sR(s) & R(s) \\ MR(s) & sR(s) \end{bmatrix}(t) \quad \text{con} \quad R(s) = (s^2 I - M)^{-1}.$$

Hint: Recuerde que $e^{tA} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$.

(iii) (2 ptos) Usando **(ii)** demuestre que la solución de (3) está dada por ($*$ denota el producto de convolución)

$$X(t) = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} \mathcal{L}^{-1}[R(s)] * \begin{pmatrix} b/l_1 \\ b/l_2 \end{pmatrix} \\ \mathcal{L}^{-1}[sR(s)] * \begin{pmatrix} b/l_1 \\ b/l_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Tiempo: 3h00 hrs.