CONTROL 3 MA 26A, 2004/1
Prof. M. del Pino
Profs. Aux. W. Arriagada, C. Muñoz
Tiempo: 3 hrs.

1. (a) Encuentre la solución del problema de condiciones iniciales

$$y'' + xy' - y = 1 + x^2, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1,$$

expresada como una serie de potencias en torno a $x = 0$.

(b) Considere la ecuación diferencial

$$x^2y'' + 5xy' + (x + 4)y = 0, \quad x > 0.$$

Encuentre una solución no idénticamente nula de la forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r},$$

calculando r y una fórmula explícita para los a_k.

2. (a) Resuelva, usando el método de la Transformada de Laplace el problema de valores iniciales

$$y'' + 4y' + 4y = f(x), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < \pi, \\ 1 \text{ si } \pi \leq x \leq 2\pi, \\ 0 \text{ si } x > 2\pi. \end{cases}$$

(b) Use transformada de Laplace para encontrar el conjunto de soluciones del problema

$$xy'' + 2(x - 1)y' - 2y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

(Recuerde que $\mathcal{L}(xf(x)) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(f(x))$).

3. (a) Considere la ecuación diferencial

$$y'' + xy' + e^x y = 0$$

Muestre que toda solución de esta ecuación posee un número infinito de ceros en $[0, \infty)$.

(b) Considere ahora la ecuación diferencial

$$y'' + a(x)\sin(y) = 0$$

donde a es una función continua en $\mathbf{R}$ y $0 \leq a(x) \leq 1$. Muestre que si y es una solución no nula de esta ecuación y $x_1 < x_2$ son dos ceros de y, entonces $x_2 - x_1 > \pi$.