# MA26A-Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Control # 3
Prof. Manuel del Pino
Profs. Auxiliares:
Alejandro Om'on
Manuel Reyes.

1. Dibuje las trayectorias de los siguientes sistemas, indicando las direcciones (flechas) en las cuales 'estas son recorridas. En caso de haber trayectorias rectil'ıneas, encu'entrelas primero, expl'ıcitamente.
$$\dot{x} = 2x + y, \quad \dot{y} = 3x + 4y.$$
$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + y.$$

2. Encuentre todos los puntos singulares de los sistemas
$$\dot{x} = -y + xy, \quad \dot{y} = -x + y + xy - 1$$
$$\dot{x} = \sin x + \sin y, \quad \dot{y} = -x + y$$
y determine el car'acter de cada uno de ellos (estabilidad y tipo de punto singular).

3. Considere el sistema
$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + f(x), \tag{1}$$
donde $f : R \to R$ es continuamente diferenciable. Denotaremos $F(s) = 2\int_0^s f(\tau)d\tau$.

**(a)** Demuestre que toda soluci'on $(x(t), y(t))$ de (1) satisface que para alguna constante $C > 0$,
$$x(t)^2 + y(t)^2 = C + F(x(t)) \quad \forall\, t > 0. \tag{2}$$
(derive $x^2 + y^2 - F(x)$).

Supondremos en lo que sigue que $f(0) = 0$, y que para cierto $\rho > 0$, y todo $s$ tal que $|s| \leq \rho$, se tiene
$$|F(s)| \leq \frac{1}{2}s^2. \tag{3}$$

**(b)** Se le propone en esta parte demostrar que el punto singular de (1), $(0,0)$, es *estable*.

Para ello, considere cualquier n'umero $\varepsilon$ con $0 < \varepsilon < \rho$, y una soluci'on de (1) tal que $x(0)^2 + y^{(}0)^2 < \frac{\varepsilon}{4}$. Usando el esquema a continuaci'on, muestre que
$$x(t)^2 + y^{(}t)^2 < \varepsilon \quad \text{para todo } t > 0. \tag{4}$$

(i) Muestre que el n'umero $C$ en (2) para esta soluci'on satisface que $C < 3\varepsilon/8$.

(ii) Suponga, por contradicci'on, que en un cierto $t_0 > 0$ la soluci'on satisface que $x(t_0)^2 + y^(t_0)^2 = \varepsilon$. Usando (i), (2) y (3), concluya que esto es imposible, por ende que (4) se cumple y que $(0, 0)$ es estable.

**(c)** Pruebe que ninguna soluci'on de (1) $(x(t), y(t))$ (excepto (0,0)), satisface que $(x(t), y(t)) \to (0, 0)$ si $t \to \infty$, en particular $(0, 0)$ no es asint'oticamente estable. (Suponga que tal soluci'on existe. Muestre primero que el $C$ correspondiente en (2) debe ser cero. Concluya una contradicci'on usando (3).

**(d)** Considere la ecuaci'on de segundo orden

$$\ddot{x} + x - x^n = 0,$$

con $n > 1$. Muestre que no hay soluciones no-nulas de esta ecuaci'on que tiendan a cero en $+\infty$.

NOTA: Usted puede trabajar en cualquier parte del problema haciendo uso de las anteriores, sin haberlas necesariamente resuelto.