

# MA26A-Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Control # 3  
Prof. Manuel del Pino  
Profs. Auxiliares:  
Juan Pedro Eberhard  
Alejandro Flores  
Marcos Goycolea.

Resuelva los tres problemas siguientes:

1. Considere el sistema

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x},$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encuentre los valores propios de  $A$  y una base de vectores propios generalizados asociada. Use éstos para encontrar la solución general del sistema.

2. Bosqueje el diagrama de fase de los siguientes sistemas lineales, indicando el tipo de punto singular de  $(0,0)$ . (a)

$$x' = x - 2y, \quad y' = 4x - 3y.$$

(b)

$$x' = y, \quad y' = -2x + 3y.$$

3. Considere la ecuación no-lineal de segundo orden

$$x'' + 2(1 - x^2)x = 0,$$

la cual es equivalente al sistema

$$x' = y, \quad y' = -2(1 - x^2)x. \tag{1}$$

(a) Encuentre todos los puntos singulares de este sistema.

(b) Demuestre que cada trayectoria  $(x(t), y(t))$  del sistema (1) debe estar contenida en el conjunto de puntos  $(x, y)$  del plano tal que

$$y^2 - (1 - x^2)^2 = C, \tag{2}$$

para alguna constante real  $C$ . (Indicación: derive la función  $y^2(t) - (1 - x(t)^2)^2$  con respecto a  $t$ ).

(c) Grafique todas las trayectorias de (1) que satisfacen (2) para  $C = 0$ , indicando claramente la dirección en que están siendo recorridos así como sus puntos de inicio y término en caso de haberlos. (Indicación: Reescriba (2) como  $= \pm\sqrt{C + (1 - x^2)^2}$ .)

(d) Repita la parte (c) para  $C = 1$ ,  $C = -1/4$  y  $C = -4$  respectivamente. Concluya con un bosquejo del diagrama de fase completo, que indique claramente puntos singulares y dirección de recorrido de las trayectorias.