Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Fisicas y Matematicas
Departamento de Ingenieria Matematica

Control 3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre Otono 99
Profesor Manuel del Pino

1. Considere la *ecuacion de Legendre*, que surge en importantes aplicaciones fisicas, estudiada originalmente por Adrien Marie Legendre en 1785, dada por

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

donde $n \geq 0$

(a) **3 pts.** Muestre que $x_0 = 1$ es un punto singular regular para esta ecuacion. Use el metodo de Frobenius, para encontrar *una* solucion en serie de potencias en torno a $x_0 = 1$.

(b) **3 pts.** Demuestre que si n es un entero no-negativo, entonces esta ecuacion posee una solucion polinomial $P_n(x)$, de grado n, con $P_n(1) = 1$. Esta solucion se llama *Polinomio de Legendre de orden n.* Encuentre explicitamente $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$. Demuestre ademas que los polinomios de Legendre son *ortogonales en* [-1,1], en el sentido que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0 \qquad si\ \ m \neq n.$$

2. (a) **3 pts.** Considere la ecuacion diferencial

$$y'' + \tfrac{\alpha}{t}y' + y = 0 \tag{*}$$

con $\alpha > 0$. Demuestre que toda solucion de esta ecuacion en $[1, \infty)$ es oscilatoria.

(b) **3 pts.** Demuestre que si $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$ y las funciones y_1 e y_2 no son identicamente nulas y satisfacen respectivamente

$$y_1'' + \frac{\alpha_1}{t} y_1' + y_1 = 0, \quad y_2'' + \frac{\alpha_2}{t} y_2' + y_2 = 0$$

en $[1, \infty)$, entonces entre los dos ceros de y_2 debe haber a lo menos un cero de y_1.

Hint: Encuentre una funcion positiva c(t) de modo que la sustitucion y(t)=c(t)u(t) transforme la ecuacion (*) en una ecuacion para u de la forma

$$u'' + p(t)u = 0\,,$$

para cierta funcion continua p(t).

3. Resuelva, mediante el metodo de transformada de Laplace los problemas de condiciones siguientes:

(a) **3 pts.**

$$ty'' + 2(t-1)y' - 2y = 0, \quad y(0) = 0,\, y'(0) = 1.$$

(b) **3 pts.**

$$y'' - y = g(t), \quad y(0) = 2,\, y'(0) = 0$$

donde

$$g(t) = \begin{cases} 0 & si\ 0 < t \leq 1 \\ 1 & si\ 1 < t \leq 2 \\ 0 & si\ 2 < t \leq 3 \\ 1 & si\ 3 < t \leq 4 \\ 0 & si\ 4 < t \end{cases}$$