

Control 3
MA26A-03

Semestre 95/1

Prof. Salomé Martínez
Aux. Manuel Reyes

Pregunta 1.

a) Estudie las soluciones y el diagrama de fase del problema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\mu & b \\ a & \mu \end{bmatrix} x$$

b) Sea el sistema $\dot{x} = Ax$, tal que A es antisimétrica, es decir que $A^T = -A$. Demuestre que si $x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}^n$ son soluciones del sistema y ortogonales en algún t_0 , entonces $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son ortogonales para todo t .

Pregunta 2.

a) Resuelva $\dot{x} = Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Resuelva $\dot{x} = Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Qué debe cumplir la condición inicial $x(0)$ para que $|x(t)|$ sea acotado para todo t .

Pregunta 3. Considere el sistema $\ddot{X} = A(t)X$ con $X \in M_{nn}$ y $A : \mathbb{R} \rightarrow M_{nn}$ continua. Recuerde que por el teorema de existencia y unicidad, este sistema tiene una única solución definida en todo \mathbb{R} para cualquier condición inicial.

Definición. Se dice que $X(t)$ es una solución fundamental si $X(t)$ es solución del sistema y es invertible para todo t .

a) Demuestre que existe una solución fundamental.

Indicación: considere $X(t)$ la matriz cuyas columnas son las soluciones de $\dot{x} = A(t)x$ con $x(0) = e_i$, con e_i el i -ésimo vector canónico.

b) Demuestre que si $X(t)$ e $Y(t)$ son dos soluciones fundamentales, entonces existe una matriz C invertible tal que $X(t) = Y(t)C$.

Indicación: considere $Z(t) = Y^{-1}(t)X(t)$ y el hecho que si $Y(t)$ es invertible y de clase \mathcal{C}^∞ entonces Y^{-1} es de clase \mathcal{C}^∞ y $\frac{d}{dt}Y^{-1} = -Y^{-1}\frac{d}{dt}Y Y^{-1}$.

c) Demuestre que si $A(t)$ tiene período τ , entonces si $X(t)$ es solución fundamental, se tiene que existe una matriz C tal que $X(t + \tau) = X(t)C$.