EXAMEN MA26A–04, Semestre Otoño 2000

Prof: Axel Osses, Auxs: Sergio Acevedo, Rodrigo Blanch.

1. Suponga que y_1 e y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación
$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$
y a_0, a_1 son funciones continuas de t.

   (i) (2p) Pruebe que $z_1 = y_1 + y_2$, $z_2 = y_1 - y_2$ son también linealmente independientes.

   (ii) (2p) Pruebe que y_1 e y_2 no pueden tener una raíz común (t_0 raíz ssi $y(t_0) = 0$).

   (iii) (2p) Demuestre que y_1 e y_2 no pueden tener un mismo punto de inflexión, a menos que a_0 y a_1 se anulen simultáneamente en ese punto (t_0 pto. inflexión ssi $y''(t_0) = 0$).

   Hint: El Wronskiano de la EDO es $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$.

2. Un modelo simple predador-presa para lobos y liebres asume que la población $x(t)$ de lobos aumenta a una tasa proporcional a la población de liebres $y(t)$ y se reduce por una tasa de mortalidad. Similarmente, la población de liebres se reduce proporcionalmente a la población de lobos, pero está sustentada por una mayor tasa de nacimientos. El modelo se escribe como un sistema de EDO:
$$x' = -\sigma x + ay, \; y' = -bx + \eta y$$
con $a > 0$, $b > 0$, $\eta > \sigma > 0$.

   Durante un tiempo, las poblaciones de lobos y liebres han estado en un punto de equilibrio (pto crítico) $\overline{x} > 0$, $\overline{y} > 0$, pero repentinamente una plaga ha reducido la población de liebres a una fracción k $(0 < k < 1)$ de su tamaño, produciéndose un desequilibrio ecológico. Estudie qué ocurre con las poblaciones a causa de la plaga. Para ello responda:

   (i) (1p) Interprete los cuatro parámetros del modelo. Los parámetros a y b son desconocidos, demuestre que $a = \sigma\overline{x}/\overline{y}$ y que $b = \eta\overline{y}/\overline{x}$, esto es $ab = \sigma\eta$.

(ii) (4p) En $t = 0$ ocurre la plaga. Tomando condiciones iniciales $x(0) = \overline{x}$, $y(0) = k\overline{y}$, resuelva el sistema para la población de liebres $y(t)$. (Puede usar el método que más le convenga).

(iii) (1p) Demuestre que las liebres se extinguen ($y(T) = 0$) en un tiempo:

$$T = \frac{1}{\eta - \sigma} \ln\left(1 + \frac{k}{1-k}(1 - \frac{\sigma}{\eta})\right).$$

3. Un modelo más realista para el sistema cazador-presa del problema 2 está dado por el sistema no lineal ($a > 0$, $b > 0$, $\nu > 0$, $\sigma > 0$)

$$x' = -\sigma x + axy, \;\; y' = -bx + \eta y.$$

El producto xy trata de modelar el hecho que los lobos no pueden comer conejos hasta que los localizan. Supondremos además que

$$0 < \sigma < \eta < 4\sigma.$$

(i) (1p) Encuentre los dos puntos críticos de este sistema. Calcule la matriz jacobiana asociada al sistema.

(ii) (3p) Determine el tipo de los puntos críticos (nodo, pto. silla o pto. espiral) y su estabilidad (inestable, asintóticamente estable). Dibuje los diagramas de fase para cada punto crítico precisando la dirección del tiempo y asíntotas o tangentes.

(iii) (1p) Dibuje un diagrama global del sistema no lineal para $x \geq 0$, $y \geq 0$.

(iv) (1p) Del modelo real se sabe que si $y(T) = 0$ para algún $T > 0$ entonces $y(t) = 0$, $\forall t \geq T$. Observe además que de la primera ecuación si $y(T) = 0$ entonces $x(t)$ decrece exponencialmente para $t \geq T$. A partir de esto y del diagrama de fases dibuje la trayectoria hasta $(0, 0)$ del desequilibrio ecológico descrito en la pregunta anterior.