

P1.- La ecuación que modela la distribución de temperatura  $T$  en una barra infinita es

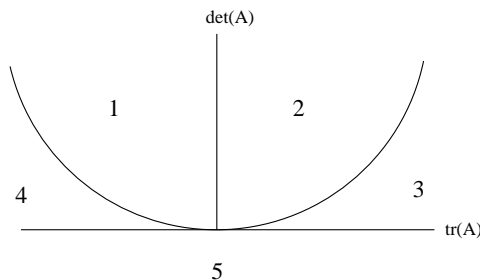
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \in ]-\infty, \infty[ \quad t \geq 0.$$

La idea de este problema es demostrar que la temperatura  $T(x, t)$  tiende a cero en todo punto de la barra cuando  $t \rightarrow \infty$ , al menos en el caso particular en que  $T(x, y) = f(x)g(t)$ , donde  $f$  y  $g$  son funciones de una variable a determinar.

- (i) Escriba la ecuación diferencial parcial en función de  $f$ , de  $g$  y de sus derivadas.
- (ii) Observe que si  $A(x) = B(t)$ ,  $\forall x, t$  entonces  $\exists k \in \mathbb{R}$  tal que  $A = B = k$ . Use esto para encontrar EDO's para  $f$  y  $g$  separadamente en función del parámetro  $k$ .
- (iii) Considere el caso  $k = -\alpha^2$ ,  $\alpha > 0$  y resuelva las ecuaciones del punto (ii) para  $f$  y para  $g$ .
- (iv) Compruebe que  $\forall x \in \mathbb{R}$  y  $\alpha > 0$  se verifica:  $\lim_{t \rightarrow \infty} T(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(x)g(t) = 0$ .

P2.-

- (i) Considere el sistema  $X' = AX$  con  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  constante. Sabiendo que el polinomio característico de  $A$  es  $p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$  indique a que tipo de punto crítico corresponde cada una de las cinco regiones de la figura:



- (ii) Considere el sistema  $X' = AX$  con  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 10 + \alpha & \alpha \end{pmatrix}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq -10$ . Demuestre que el origen es el único punto crítico. Trazando la recta que relaciona el determinante de  $A$  con su traza, determine la naturaleza de este punto crítico como función de  $\alpha$ .

P3.- Analice cualitativamente los siguientes sistemas no lineales:

$$(A) \begin{cases} x' = x - y \\ y' = x - x^3 \end{cases} \quad (B) \begin{cases} x' = \sin(x) - \cos(y) \\ y' = x - y \end{cases}$$

Indique en cada caso:

- (i) Puntos críticos.
- (ii) Sistemas linealizados en torno a cada punto crítico.
- (iii) Tipo cualitativo de cada punto crítico.
- (iv) Tipo de estabilidad.
- (v) Diagrama de fases aproximado.

Tiempo 3hrs.